① Αλγεβρική Τοπολογία 15/09/2023

Μάθημα 02

$G \curvearrowright X \to X \to X/G$

Παράδειγμα: $\mathbb{RP}^n$ πραγματικός προβολικός χώρος διάστασης n.

Η ομάδα $\mathbb{R}^*$ (με συνήθη πολ/σμό) δρα με ομοιομορφ. στο $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

$$g * (x_1, \dots, x_n) = (gx_1, \dots, gx_n).$$

Ορίζουμε $\mathbb{RP}^n = \dfrac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{R}^*}$

ο αντ. χώρος τροχιών.

Η τροχιά του x (δηλ. σημείο του αντ. χώρου) είναι ο μονοδιάστατος γραμμικός υπόχωρος που παράγ. από το x χωρίς το 0.

Έστω $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ η αντ. απεικόνιση πηλίκο.

Ο περιορισμός $\pi|: S^n \to \mathbb{RP}^n$ είναι συνεχής και επί $\to \mathbb{RP}^n$ ομοιομορφισμός (9)

κι' συνεκτικός.

<u>Παράδειγμα</u>:

Η ομάδα $\mathbb{Z}^n$ δρα στον $\mathbb{R}^n$ με μεταφορές: $g * x = g + x$.

Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n-\text{φορές}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω X τ.χ. και $A_1, \dots, A_r$ μια πεπερ. οικογένεια κλειστών ξένων υποσυνόλων του X.

Στον χώρο X θεωρούμε την σχ. ισοδ. που έχει κλάσεις $A_1, \dots, A_r, \{x\}, x \notin \bigcup_i A_i$

<u>Συμβ</u>: $X/(A_1 \dots A_r)$ το αντίστοιχο πηλίκο δ.χ. που προκύπτει από τον X θεωρώντας κάθε A_i ως ένα σημείο.

$$\frac{S^1 \times I}{S^1 \times \{0\}}$$

$I=[0,1]$

Παράδειγμα: Στο χώρο $X=\mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση ισοδ. $x \sim y$ αν $x, y \neq 0$ $\Rightarrow$ έχουμε δύο κλάσεις $[0]$, $[1] = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ Hausdorff;
το $\mathbb{R}/\sim$ δεν είναι Hausdorff, αφού αν ήταν τα μονοσύνολα θα ήταν κλειστά.
Συνεπώς, το $\{[1]\}$ θα ήταν κλ.
$\Rightarrow \{[0]\}$ θα ήταν ανοικτό
$\Rightarrow$ άτοπο διότι $\pi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$
που δεν είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

Χώροι Επισύναψης

Έστω X_α, $\alpha \in I$ οικογένεια τ.χ. και $\bigsqcup_\alpha X_\alpha = \bigcup_\alpha X_\alpha \times \{\alpha\}$.

$= \{ (x,\alpha) \mid \alpha \in I, x \in X_\alpha \}$. (4)

Η ξένη ένωση τους γίνεται τ.χ ως εξής:

$U \subseteq \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ ανοικτό $\Leftrightarrow$

$U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\})$ ανοικτό.

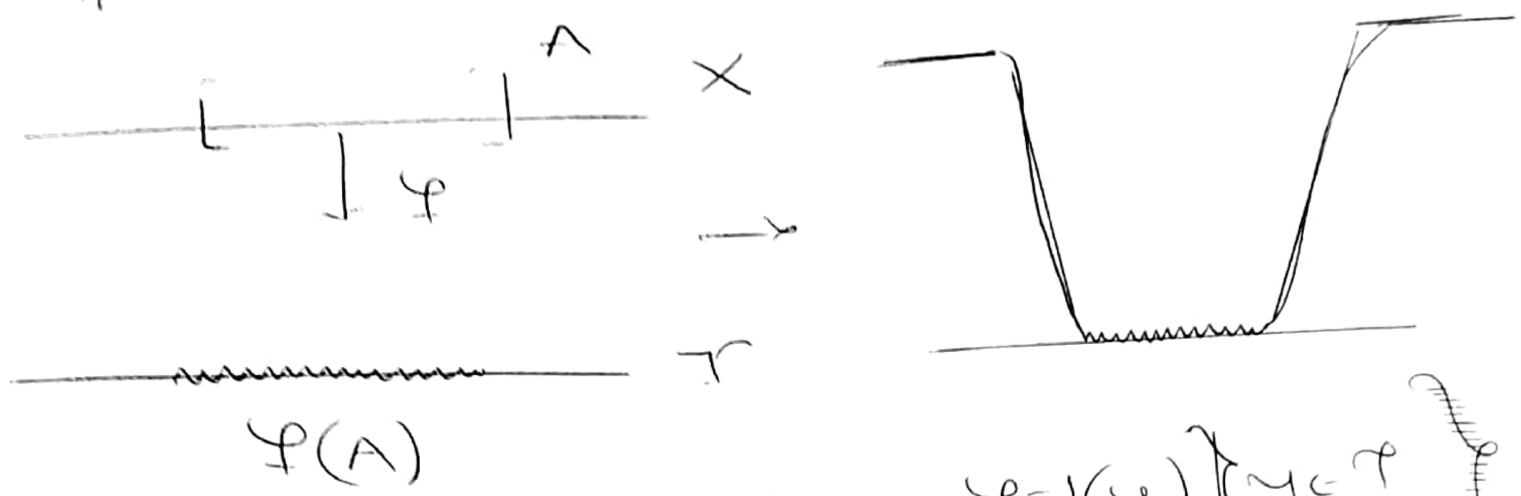
$X_\alpha \times \{\alpha\} \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}} X_\alpha$.

(1) Είναι άμεσο ότι ξένη ένωση συμπ. τ.χ. σε πεπερ. το πλήθος συμπ. είναι συμπαγής.

- Η απεικόνιση $X_\alpha \to \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, $x_\alpha \mapsto (x_\alpha, \alpha)$ "εμφυτεύει" κάθε χώρο στην ξένη ένωση. Και μέσω αυτής μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε χώρο ως υπόχωρο της ένωσης.

<u>Ορσ</u>: Έστω X, Y τ.χ., $A \subseteq X$ κλειστό και $f: A \to Y$ συνεχής.

Στην ξένη ένωση ο $X \sqcup Y$
ορίζουμε σχέση ισοδ. $\sim$ της
οποίας οι κλάσεις είναι



$\{x\},\ x \notin A$ και $\{y \cup \varphi^{-1}(y)\}_{y \in Y}$.

<u>Συμβ</u>: $Y \cup_{\varphi} X = \dfrac{Y \sqcup X}{a \sim \varphi(a)}$ τον
αντίστοιχο χώρο πηλίκο. και
λέμε ότι προκύπτει από την επι-
σύναψη του X στον Y κατά μή-
κος του A μέσω της φ.

<u>Ασκ</u>: Αν $\pi : X \sqcup Y \to Y \cup_{\varphi} X$
η απεικ. πηλίκο, τότε ο περιορισ-
μός $\pi|_Y : Y \to \pi(Y)$ είναι ομοιο-
μορφισμός. (και $\pi(Y)$ κλειστό).

Έτσι μπορούμε να θεωρούμε 6

να θεωρούμε στην συνέχεια το

I ως κλειστό υπόχωρο του

$I \cup_f X$. Σημειώνουμε επίσης

$I \cup_f X$ συμπαγής αν I, X συμπ

(ως συνεχής εικόνα συμπ $X \sqcup I$)

Ισχύει επίσης το εξής:

Αν X, I φυσιολογικοί (normal)

$\Rightarrow I \cup_f X$ είναι φυσιολογικός.

(Ι διαιτέρως Hausdorff.)

<u>Ορσ</u>: Ένας τ.χ. λέγεται <u>φυσιο-</u>
<u>λογικός</u> αν τα μονοσύνολα του είναι

κλειστά και τα κλειστά υποσύνολά

του διαχωρίζονται από ανοικτά.

(Αν $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά

$\Rightarrow \exists\, U_1, U_2 \subseteq X$ ανοικτά $U_1 \supseteq F_1$, $U_2 \supseteq F_2$ και $U_1 \cap U_2 = \varnothing$)

Αν X μετρικοποιήσιμος $\Rightarrow$ (φ)

<u>φυσιολογικός</u>

$$F_1 \cap F_2 = \emptyset : \varphi(x) = \frac{dist(x, F_1)}{dist(x, F_1) + dist(x, F_2)}$$

$\varphi : X \to [0,1]$, $\varphi(F_1) = 0$, $\varphi(F_2) = 1$

<u>Παράδειγμα</u>: Κάθε συμπαγής και Hausdorff είναι φυσιολογικός.

<u>Π.χ.</u> $Y = \{x_0\}$ μονοσύνολο και

$\varphi : \partial D^n \to \{x_0\}$ τότε

$\left(D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \Rightarrow \underset{\subseteq D^n}{\partial D^n} = S^{n-1} \right)$

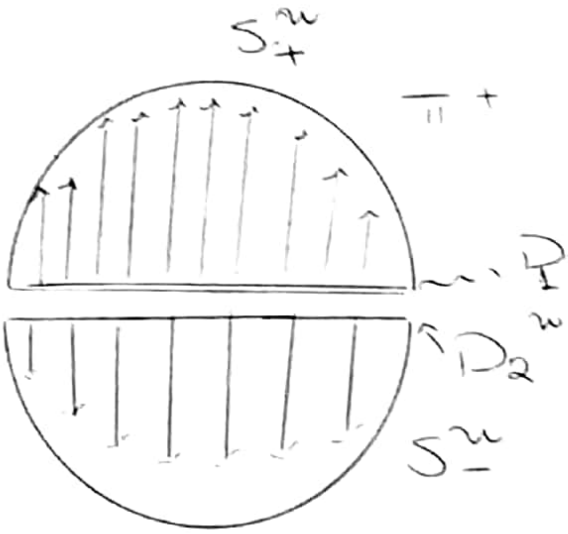
$\Rightarrow \{x_0\} \cup_\varphi D^n \cong S^n$

<u>Π.χ.</u> $i : \partial D^n \hookrightarrow D^n$, $x \mapsto x$

$\Rightarrow D^n \cup_\varphi D^n = S^n$.

$$\begin{tikzcd}
 & D_1^n \sqcup D_2^n \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "απ"] & \\
S^n \arrow[rr, dashed] & & D_1^n \cup_i D_2^n
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\begin{array}{l} D_1 = D \\ D_2 = D \end{array}}$



$\pi^+ : x \longmapsto \left(x, \sqrt{1-\|x\|^2}\right)$

$\pi^- : x \longmapsto \left(x, -\sqrt{1-\|x\|^2}\right)$

Επάγεται ~~ομοιομορφ~~ : $\pi : D_1^n \sqcup D_2^n \to S^n$
από τους ομοιομορφ. π^+, π^-, δηλ.
$\pi|_{D_1^n} = \pi^+$, $\pi|_{D_2^n} = \pi^-$

$\to$ η π απεικόνιση πηλίκο γιατί
είναι κλειστή ($D^n \sqcup D^n$ συμπ.
S^n Hausdorff)

.... Άρα πράγματι
$D^n \vee_i D^n \cong S^n$.

Συμπλέγματα κελιών

Ένα n-κελί e^n είναι ένας χώρος $\cong$
ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n \cong$
$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.
(δηλ. ομοιομορφικός με μπάλα ακτίνας 1.)

Ορσ: Ένα σύμπλεγμα κελιών (9)

είναι ένας τ.χ X που ορίζεται

επαγωγικά ως εξής:

① Αρχίζουμε με ένα διακριτό

χώρο X^0 (δηλ. διακριτό τοπ.)

του οποίου τα στοιχεία αναφέρο-

νται ως 0-κελιά.

② Σε κάθε βήμα από τον $n-1$

σκελετό X^{n-1} προκύπτει ο $n-$

σκελετός X^n με την επισύναψη

n-κελιά D_α^n

Δηλ. $X^n = X^{n-1} \sqcup_\varphi \left(\bigsqcup_\alpha D_\alpha^n \right)$

$\varphi = (\varphi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha^n \to X^{n-1}$

$\partial D_\alpha^n \cong S^{n-1}$

Δηλ. επισυν.

$\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$, $\varphi = \bigsqcup_\alpha \varphi_\alpha : \bigsqcup_\alpha \partial D_\alpha^n \to X^{n-1}$

(υπόλοιπος ορσ στο επόμενο μάθημα)