(4)

η απεικόνιση πηλίκο, γιατί είναι κλειστή ($D^n \sqcup D^n$ συμπ., S^n Hausdorff) .....

Άρα πράγματι $D^n \cup D^n \cong S^n$.

(1) **Μάθημα 03** (20/02/2023)

Συμπλέγματα κελιών

Ορσ: Ένα n-κελί e^n είναι ένας χώρος ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}^n \cong B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$.

Ορσ: Ένα **σύμπλεγμα κελιών** X είναι ένας τ.χ που ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

1ο βήμα: Αρχίζουμε με ένα διακριτό τ.χ. X^0 του οποίου τα σημεία αναφέρονται ως 0-κελιά.

2ο βήμα: Κατασκευάζουμε τον **n-σκελετό** X^n επισυνάπτοντας στον X^{n-1} μια οικογένεια e^n_α, $\alpha \in \Lambda$, μια οικογένεια n-κελιών μέσω των συνεχών απεικονίσεων

$\varphi_\alpha^n : \partial D_\alpha^n \to X^{n-1}$

Άρα έχουμε $\varphi : \coprod_\alpha D_\alpha^n \to X^{n-1}$

με $\varphi|_{D_\alpha^n} = \varphi_\alpha$. και

$$X^n = X^{n-1} \cup_\varphi \left(\coprod_\alpha D_\alpha^n \right)$$

Λόγω προηγούμενης άσκησης μπορούμε να θεωρήσουμε την X^{n-1} ως (κλειστό) υπόχωρο του X^n.

<u>3ο Βήμα</u>) Η διαδικασία σταματά φώνεται σε κάποιο βήμα και $X = X^n$ ή συνεχίζει και $X = \bigcup_n X^n$

Στην 2η περίπτωση εφοδιάζεται με την ασθενή τοπολογία.

(Ένα υποσύνολο B του X είναι κλειστό ⟺ $B \cap X^n$ είναι κλ. υποσύνολο του X^n, $\forall n \in \mathbb{N}$.)

Η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} D_\alpha^n \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{\varphi}_\alpha"'] & X^{n-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^n \arrow[r, "\pi"] & X^n \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

επεκτείνει την

$\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1} \hookrightarrow X^n$

με την έννοια $\tilde{\varphi}_\alpha|_{\partial D_\alpha^n} = \pi \circ \varphi_\alpha$.

$\tilde{\varphi}_\alpha$ αναφέρεται ως <u>χαρακτηριστική απεικόνιση</u>

- Αν $X = X^n$, για κάποιο n τότε λέμε ότι το σύμπλεγμα είναι πεπερασμένης διάστασης
(το μικρότερο τέτοιο n = διάσταση)

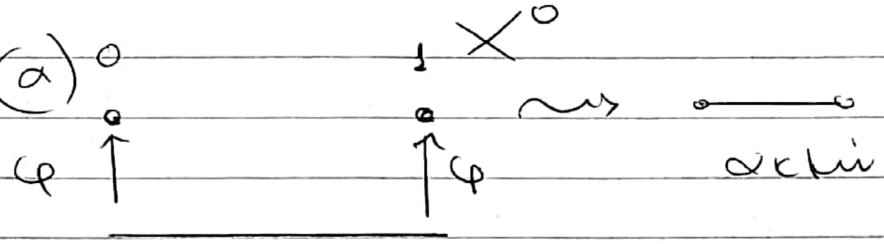
Το X λέγεται <u>πεπερασμένο</u> αν αποτελείται από πεπερ. το πλήθος κελιά.

- Είναι άμεσο από τους ορισμούς ότι κάθε πεπερ. σύμπλεγμα κελιών είναι συμπαγής τ.χ.

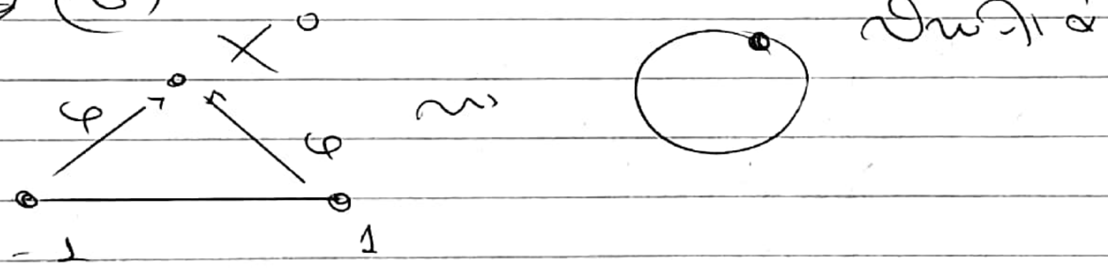
Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε σύμπλεγμα κελιών είναι φυσιο-λογικός χώρος (ιδιαιτέρως Hausdorff).

<u>Παράδειγμα</u> ① Κάθε γράφημα είναι σύμπλεγμα κελιών διάστασης ≤ 1.

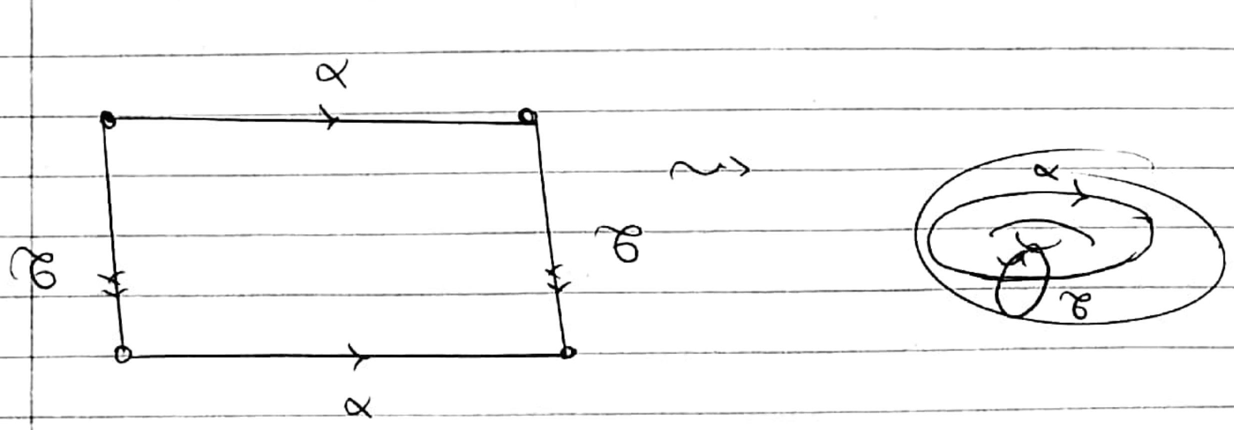
<u>Π.χ.</u> (α)



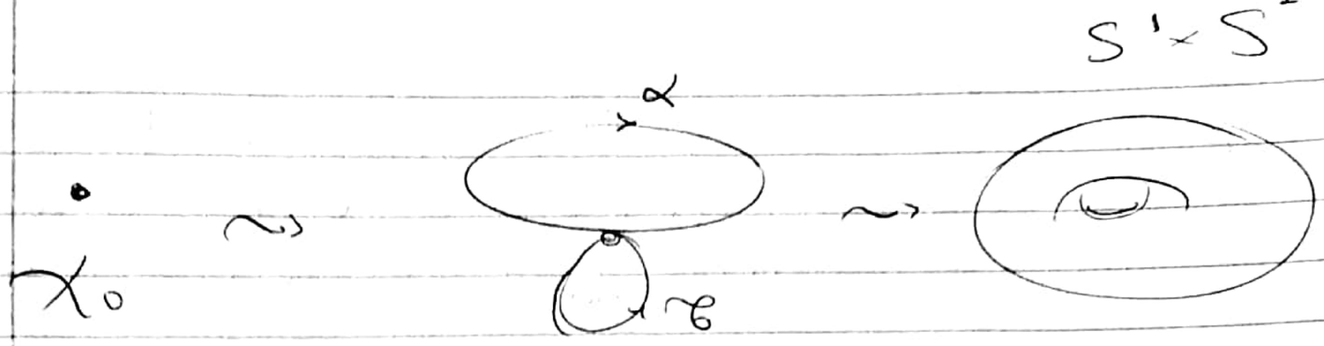
(β)



② Η σπείρα $T = S^1 \times S^1$ είναι σύμπλεγμα κελιών:



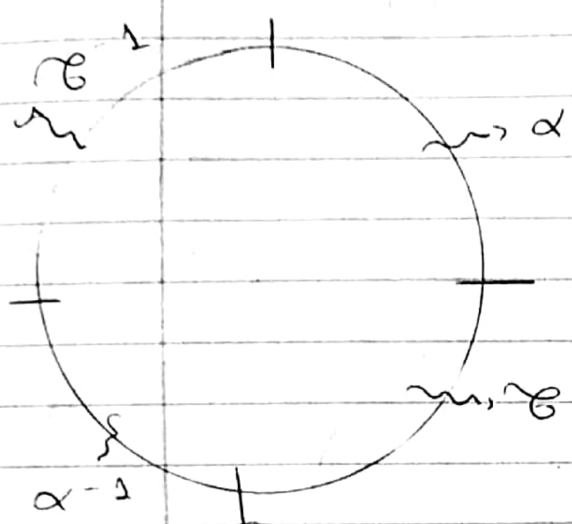
(4)



$\varphi: \partial D^2 \longrightarrow \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1}$

$\quad \ \ \ \ |||$

$\quad \ \ \ S^1$



- 1 0-κελί
- 2 1-κελιά
- 1 2-κελί

(3) η σφαίρα S^n μπορεί να θεωρηθεί ως σύμπλεγμα κελιών με ένα 0-κελί και ένα n-κελί.

$S^n \cong \{x_0\} \cup_\varphi D^n$. $\varphi: \partial D^n \to \{x_0\}$.

ή $S^n \cong D^n \cup_i D^n$

Ορσ: Έστω $f, g: X \to Y$ ένα ζεύγος απεικονίσεων μεταξύ e.x.

Μια ομοτοπία από την f στην g είναι μια συνεχής απεικόνιση

$H: X \times \underset{[0,1]}{I} \to Y$ με $H(x,0) = f(x)$

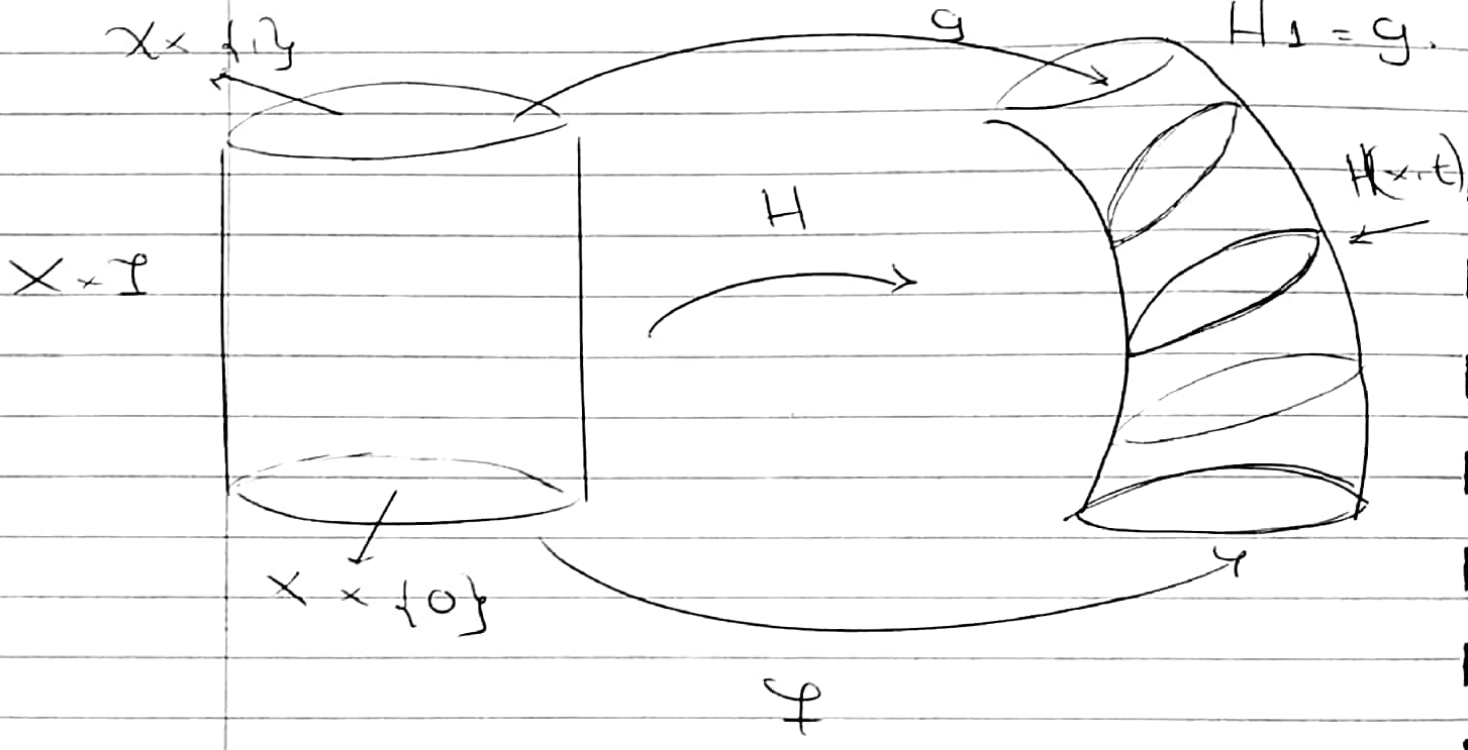
$H(x,1) = g(x)$

(5)

Αν υπάρχει ομοτοπία H από f σε g λέμε ότι είναι <u>ομοτοπικές</u> και συμβ. $f \simeq g$ ή $f \overset{H}{\simeq} g$.

Μια ομοτοπία H όπως πριν αναφέρεται ως μια μονοπαραμετρική οικογένεια:

$H_t : X \to Y,\ t \in I$ τ.ω $H_0 = f$, $H_1 = g$.



<u>Παράδειγμα:</u> X τ.χ και

$f, g : X \times I \to \mathbb{R}^n$ συνεχείς.

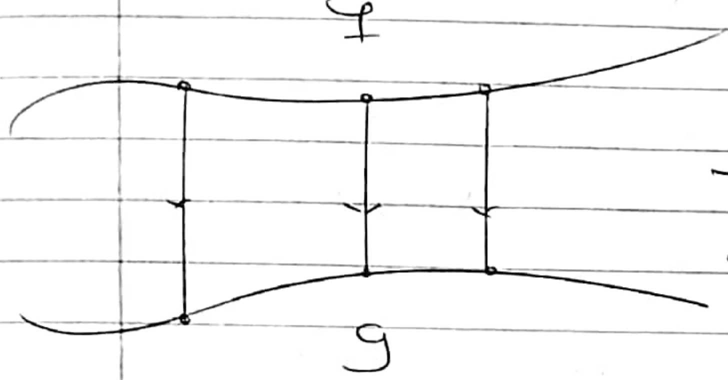
Τότε f, g είναι ομοτοπικές

Πράγματι, ορίζουμε ομοτοπία (γραμμ.).

(6)

$H: X \times I \to \mathbb{R}^n$

$H(x,t) = (1-t)f(x) + t\,g(x)$



Γενικότερα αν Y είναι κυρτός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $f, g: X \to Y$ $\Rightarrow$ f, g ομοτοπικές.

Για την προηγούμενη γραμμική ομοτοπία. $H(x,t) \in Y$ αφού $f(x)$, $g(x) \in Y$.

- Η ομοτοπία είναι σχ. ισοδυναμίας στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων από ένα χώρο X σε ένα χώρο Y.

(α) $f \simeq f: X \to Y$, $H(x,t) = f(x)$

(β) αν $f \overset{G}{\simeq} g \Rightarrow g \overset{H}{\simeq} f$, όπου

$H(x,t) = G(x, 1-t)$

(γ) Αν $f \overset{F}{\simeq} g$ και $g \overset{G}{\simeq} h$

τότε $f \overset{H}{\simeq} h$, όπου.

(7)

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Η συνέχεια της H έπεται από το λήμμα συγκόλλησης.

Λήμμα συγκόλλησης

Έστω $F_1, \dots, F_k$ ένα πεπερ. κλειστό κάλυμμα του χώρου X.

Αν $\varphi: X \to Y$ τ.ω $\varphi|_{F_i}$ συνεχής $\forall i = 1 \dots k \Rightarrow \varphi$ συνεχής.

απόδ: $A \subseteq Y$ κλειστό

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^{-1}(A) \cap F_i$$

$$= \bigcup_{i=1}^{k} \varphi|_{F_i}^{-1}(A) \text{ κλειστό}$$

$\square$