Μαθημα 04 22/09/2023

Επιπλέον, η ομοτοπία διατηρείται απο συνθέσεις:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\varphi_1"] \arrow[r, bend right, "\varphi_2"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

Αν $\varphi_1 \overset{F}{\underset{H}{\simeq}} \varphi_2$, $g_1 \overset{G}{\simeq} g_2 \rightarrow$

$g_1 \circ \varphi_1 \simeq g_2 \circ \varphi_2$, όπου.

$H_t = G_t \circ F_t$, δηλ.

$H(x,t) = G\big(t, F(x,t)\big)$

<u>Ορσ</u>: Έστω X, Y τ.χ., $\varphi, g : X \to Y$ συνεχείς και $A \subseteq X$. Λέμε οτι φ, g είναι <u>ομοτοπικές</u> σε σχέση με το A αν υπαρχει ομοτοπία $H : X \times I \to Y$ με $H(x,0) = \varphi(x)$, $H(x,1) = g(x)$ και

$$H(\alpha,t) = \varphi(\alpha) = g(\alpha), \ \forall \alpha \in A, \ \forall t \in I$$

<u>Συμβ</u> $\varphi \simeq_A g$.

Παρατηρούμε οτι αν $\varphi \simeq_A g$. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι

f, g να ταυτίζονται στο A.

Σημ. $f|_A = g|_A$.

<u>Ορσ</u> ① Ένα <u>μονοπάτι</u> σ' ένα τ.χ. X είναι μια συνεχής απ. $f: I \to X$. Τα $f(0), f(1)$ είναι τα <u>άκρα</u> του μονοπατιού (αρχή, τέλος αντ.)

② f <u>κλειστό</u> αν $f(0) = f(1)$.

③ f <u>θηλειά</u> στο $x_0 \in X$ αν:

$f(0) = f(1) = x_0$.

- Δύο μονοπάτια $g, f: I \to X$ με τα ίδια άκρα λέγονται <u>ομοτοπικά</u> αν είναι ομοτοπικά σε σχέση με το $\{0,1\} = \partial I$.

Δηλ. υπάρχει ομοτοπία $H: I \times I \to X$ τ.ω.

$H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in I$

$H(0,t) = f(0) = g(0)$

$H(1,t) = f(1) = g(1)$, $\forall t \in I$.

Όπως πριν, εύκολα προκύπτει ότι η ομοτοπία μεταξύ μονοποτιών του X είναι σχέση ισοδ.

<u>Συμβ</u> $[f]$ την κλάση ομοτοπίας του μονοπατιού f.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $f: I \to X$ μονοπάτι και $\varphi: I \to I$ συνεχής με $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1 \to f \simeq f \circ \varphi$.

<u>απόδ</u>: Θεωρούμε ομοτοπία

$$H(s,t) = f\Big(\big(1-t\big)\cdot s + t\,\varphi(s)\Big)$$

- <u>Ορσ</u> Δύο μονοπάτια f, g λέγονται <u>διαδοχικά</u> αν $f(1)=g(0)$.

Αν τα f, g είναι διαδοχικά ορίζεται το γινόμενό τους ως εξής:

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

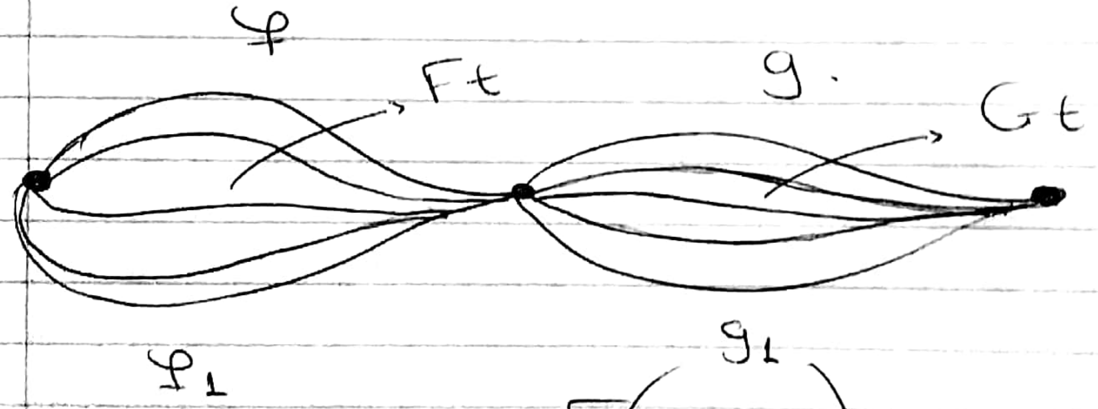
από το λήμμα συγκόλλησης $f \cdot g$ είναι συνεχής.

Το γινόμενο μονοπατιών επάγει

γινόμενο στις αντίστοιχες κλάσεις ομοτοπίας:

$$[\varphi]\circ[g] := [\varphi\cdot g]$$

<u>Καλά ορισ.</u>: αν $\varphi \overset{F}{\simeq} \varphi_1$ και $g \overset{G}{\simeq} g_1$ → φ έχει τα ίδια άκρα με φ_1 και g έχει τα ίδια άκρα με g_1. (φ_1, g_1 διαδοχικά) και $\varphi g \overset{H}{\simeq} \varphi_1 \cdot g_1$



$$H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t), & 0\le s\le \frac{1}{2} \\ & t\in I \\ G(2s-1,t) & \frac{1}{2}\le s\le 1 \end{cases}$$

Δηλ. $H_t = F_t \circ G_t$, από λήμμα συγκολ. ----

<u>Ιδιότητες</u>

(α') αν ορίζεται το γινόμενο $[\varphi]([g][h])$

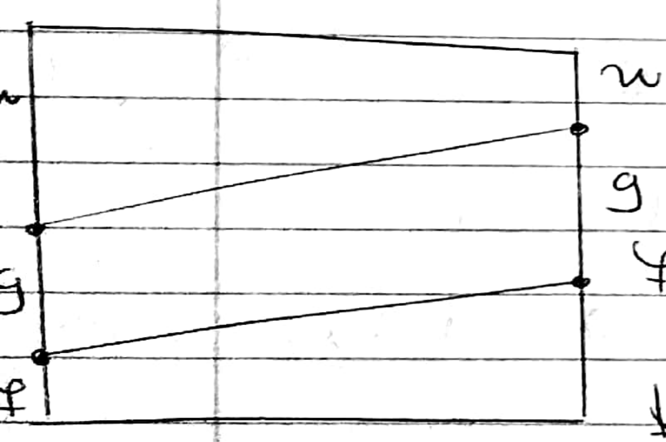
τότε ορίζεται το γινόμενο

$([\varphi]\circ[g])\circ[h]$ και

$$[\varphi]\cdot([g]\cdot[h]) = ([\varphi]\cdot[g])\cdot[h]$$

Αρκεί νδο $\varphi\cdot(g\cdot h) = (\varphi\cdot g)\cdot h$

$$H(s,t) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{4t}{2-s}\right), & 0 \le t \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{s}{4} \\ g(4t-2+s), & \dfrac{1}{2} - \dfrac{s}{4} \le t \le \dfrac{3}{4} - \dfrac{s}{4} \\ h\left(\dfrac{4t-3+s}{1+s}\right), & \dfrac{3}{4} - \dfrac{s}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$



• Αν $x_0 \in X$ συμβ. με C_{x_0} το σταθερό <u>μονοπάτι</u> στο x_0 δηλ.

$$C_{x_0}(s) = x_0,\ \forall s \in I.$$

• Αν $\varphi: I \to X$ μονοπάτι, τότε

$$[\varphi\cdot C_{\varphi(1)}] = [C_{\varphi(0)}\cdot\varphi] = [\varphi]$$

Θ.δ.ο. $C_{\varphi(0)}\cdot\varphi \simeq \varphi$ (όμοια το άλλο).

6

Πραγματι θεωρουμε

$$H(t,s) = \begin{cases} x_0, & 0 \le t \le \frac{s}{2} \\ \varphi\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

↑

χρονος

- Για καθε μονοπατι φ οριζεται το αντιστροφο μονοπατι φ^{-1} ως εξης:

$$\varphi^{-1}(s) = \varphi(1-s), \quad s \in I$$

- $[\varphi] \cdot [\varphi^{-1}] = [C_{\varphi(0)}]$, $[\varphi^{-1}] \cdot [\varphi] = [C_{\varphi(1)}]$

Μεσω της ομοτοπιας

$$H(t,s) = \begin{cases} \varphi(2+(1-s)), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \varphi((2-2t)(1-s)), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi \cdot \varphi^{-1} \simeq C_{\varphi(0)}$.

Ορσ: Εστω X τ.χ., $x_0 \in X$

Θεωρουμε το συνολο

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ [\varphi] \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi: I \to X \\ \text{συνεχής} \\ \varphi(0) = \varphi(1) = x_0 \end{array} \right\}.$$

των κλάσεων ομοτοπίας των θηλειών στο x_0.

Από τις προηγούμενες ιδιότητες το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ εφοδιασμένο με το γινόμενο

$$[\varphi] \cdot [g] = [\varphi \cdot g]$$

είναι ομάδα η οποία αναφέρεται ως η <u>θεμελιώδης ομάδα</u> του χώρου X στο x_0.

<u>Ουδέτερο στοιχείο</u>: $1_{\pi_1(X, x_0)} = [c_{x_0}]$

και $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$.

<u>Θεώρημα</u> (αλλαγή σημείων αναφοράς)

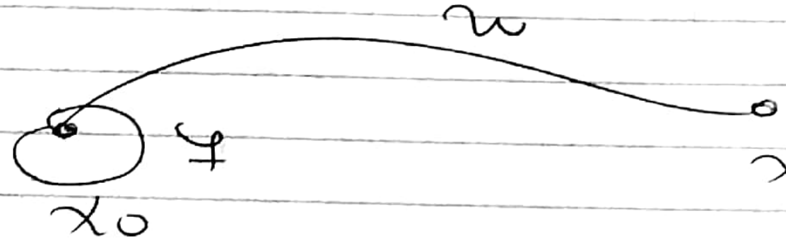
Έστω X ένας κ.τ.σ. (κατά τόξα συνεκτικός) τ.χ. $x_0, x_1 \in X$ και $h: I \to X$ μονοπάτι από το x_0 στο x_1.

Η απεικόνιση

$\Phi_u : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$

$\Phi_u([\varphi]) = [u^{-1}\varphi u]$.

είναι ισομορφισμός ομάδων.



<u>απόδειξη</u>:

$\Phi_u([\varphi]\cdot[g]) = \Phi_u([\varphi\cdot g])$

$[u^{-1}\cdot\varphi\cdot g\, u]$

$[u^{-1}\varphi][g\cdot u] = [u^{-1}\varphi]\cdot[c_{x_0}][gu]$

$[u^{-1}\varphi u]\cdot[u^{-1} g u]$

$\Phi_u([\varphi])\cdot\Phi_u([g])$.

Η Φ_u είναι ισομορφισμός με αντίστροφη Φ_u^{-1}.

∎

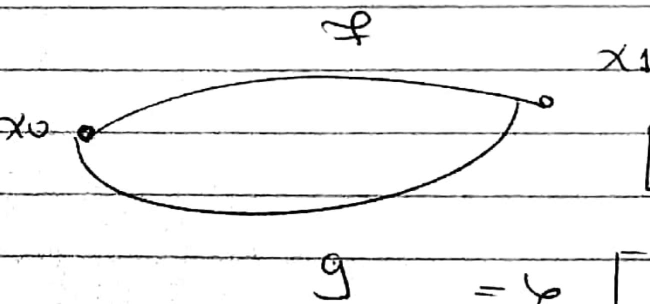
(9)

Αν X κ.μ.σ.χ πολλές φορές συμβ. με $\pi_1(X)$ την θεμελιώδη ομάδα χωρίς να θεωρούμε συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.

<u>Ορσ</u>: Ένας κατά τόξο συνεκτικός τ.χ. X λέγεται <u>απλά συνεκτικός</u> αν $\pi_1(X) = \{1\}$.

Δηλ. κάθε μονοπάτι είναι ομοτοπικό με το σταθερό μονοπάτι.

<u>Πόρισμα</u>: Μονοπάτια με ίδια άκρα είναι ομοτοπικά μεταξύ τους.



$f \simeq g$;

$[f \cdot g^{-1}] = [c_{x_0}]$

$\Rightarrow [f] \cdot [g^{-1}] = [c_{x_0}]$

$\Rightarrow [f] \cdot [g^{-1}] \cdot [g] = [c_{x_0}] \cdot [g]$

$\Rightarrow [f] = [g] \Rightarrow f \simeq g$.

Παράδειγμα

Κάθε κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικός $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Πράγματι, κάθε θηλειά φ στο x_0 είναι ομοτοπική με το C_{x_0}.

$$H(x,t) = (1-t)\,\varphi(x) + t\,x_0.$$