0)

Παράδειγμα:

Κάθε κυρτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ είναι απλά συνεκτικός

$\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Πράγματι, κάθε θηλειά f στο x_0 είναι ομοτοπική με το c_{x_0}.

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + t x_0.$$

Μάθημα 5ο (01/03/2023)

(1) **Επαγόμενοι Ομομορφισμοί**

Έστω $\varphi: X \to Y$ συνεχής απ. μεταξύ τ.χ. και $x_0 \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\ I \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\varphi \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε τον επαγόμενο ομομορφ.

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$, f θηλειά στο x_0.

- φ_* καλά ορισ.: αν $f \overset{H}{\simeq} g$ για κάποια ομοτοπία H, παρατηρούμε ότι $\varphi \circ f \overset{\varphi \circ H}{\simeq} \varphi \circ g$.

②

<u>φ_* ομομορφ.:</u>

$$\varphi_*([f]\cdot[g]) = \varphi_*([f\cdot g])$$
$$= [\varphi\circ(f\cdot g)] = [(\varphi\circ f)\cdot(\varphi\circ g)]$$
$$= [\varphi\circ f]\cdot[\varphi\circ g] = \varphi_*([f])\cdot\varphi_*([g])$$

- αν $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$, φ, ψ συνεχείς

και $x_0 \in X$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[rr, bend right, "(\psi\circ\varphi)_*"'] & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[r, "\psi_*"] & \pi_1(Z, \psi(\varphi(x_0)))
\end{tikzcd}$$

<u>Πράγματι</u>, αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$

$$\Rightarrow (\psi\circ\varphi)_*([f]) = [\psi\circ\varphi\circ f]$$
$$= \psi_*([\varphi\circ f]) = \psi_*\circ\varphi_*([f]).$$

- $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

- Αν $\varphi, P: X \to Y$ συνεχείς και
$\varphi \simeq_{\{x_0\}} P \Rightarrow$
$\varphi_* = P_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\|}{P(x_0)}$

Πράγματι, αν f θηλιά στο x_0.

και $\varphi \overset{F}{\simeq}_{\{x_0\}} e \Rightarrow \varphi\circ f \overset{H}{\simeq}_{\{0,1\}} P\circ f$

όπου $H_t = F_t \circ f_t$.

<u>Πρόταση</u>: Η θεμελιώδης ομάδα ενός κατά τόξα συνεκτικού τ.χ. είναι τοπολογικό αναλλοίωτο.

<u>αποδ</u>: Έστω X κ.μ.σ., $x_0\in X$ και $\varphi: X\to Y$ ομοιομορφισμός με αντ. $\psi: Y\to X$.

$\Rightarrow \varphi\circ\psi = id_Y \Rightarrow (\varphi\circ\psi)_* = id_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$

$\varphi_*\circ\psi_* = id_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$.

Ομοίως, $\psi_*\circ\varphi_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$, άρα φ_* είναι ισομορφισμός. □

<u>Ορσ</u>: Έστω X τ.χ. και $A\subseteq X$.

Μια συνεχής απ. $r: X\to A$ λέγεται <u>συστολή</u> αν $r(a)=a$, $\forall a\in A$.

Δηλ. αν

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & X \arrow[d, "r"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(ένθεση)

Παρατηρούμε ότι κάθε συστολή είναι (επί και) απ. πηλίκο.

<u>Πρόταση</u>: Αν $r: X \to A$ συστολή τότε η ένθεση $i: A \hookrightarrow X$ επάγει μονομορφισμό $i_*: \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ και η συστολή επιμορφισμό

$$r_*: \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a), \ \forall a \in A$$

<u>απόδ</u>: $r \circ i = id_A \Rightarrow$

$$r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A, a)} \Rightarrow \quad \begin{matrix} r_* \text{ επί} \\ i_* \ 1\text{-}1 \end{matrix}$$

$\square$

<u>Ορσ</u>: Μια συστολή $r: X \to A$ λέγεται <u>περιστολή</u> ή <u>συστέλλουσα παραμόρφωση</u> αν επιπροσθέτως $i \circ r \simeq_A id_X$.

Δηλ. υπάρχει ομοτοπία $H: I \times X \to X$

(i) $H(x, 0) = x, \ \forall x \in X$

(ii) $H(x, 1) = r(x)$, "

(iii) $H(a, t) = a, \ \forall a \in A, \forall t \in I$.

Αν υπάρχει περιστολή $r: X \to A$ λέμε ότι ο X <u>περιστέλλεται</u> στον υπ. A. Για να περιστέλλεται ο X στον A αρκεί να υπάρχει

⑤

ομοτοπία $H: X \times I \to X$ με αρχή id_X, "τέλος" στο A και να αφήνει τα σημεία του A αναλλοίωτα.

(i)' $H(x,0) = x, \ \forall x \in X$

(ii)' $H(x,1) \in A, \ \forall x \in X$

(iii)' $H(\alpha, t) = \alpha, \ \forall \alpha \in A, \ \forall t \in I$.

Για την ισοδυναμία των (i),(ii),(iii) με (i)',(ii)',(iii)' αρκεί να θεωρήσουμε $r(x) = H(x,1)$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $A \subseteq X$ και $r: X \to A$ περιστολή. Τότε η ένθεση $i: A \to X$ επάγει ισομορφισμό

$i_*: \pi_1(A, \alpha) \to \pi_1(X, \alpha), \ \alpha \in A$.

<u>απόδ</u>: $r \circ i = id_A \Rightarrow r_* \circ i_* = id_{\pi_1(A,\alpha)}$ ①

Επίσης; $id_X \simeq_A i \circ r$. Ιδιαιτέρως

$id_X \simeq_{\{\alpha\}} i \circ r \Rightarrow i_* \circ r_* = id$ ②

①,② $\Rightarrow i_*$ ισομορφισμός □

⑥

<u>Ορ6</u> Ένας χώρος X λέγεται <u>συσταλτός</u> ή <u>συστάλτος</u> αν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση $r: X \to \{x_0\}$.

Δηλ., αν ο X περιστέλλεται σε σημείο του.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε συσταλτός είναι απλά συνεκτικός.

<u>απόδ</u>: Έστω $x_0 \in X$ και περιστολή $r: X \to \{x_0\}$.

$$\Rightarrow \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}.$$

Αν H η αντίστοιχη ομοτοπία και $x \in X \Rightarrow \varphi(t) = H(x, t)$ κινούμαστε από το x στο x_0 και άρα (i) X κατά τόξα συνεκτικός.

Π

<u>Παραδείγματα</u>:

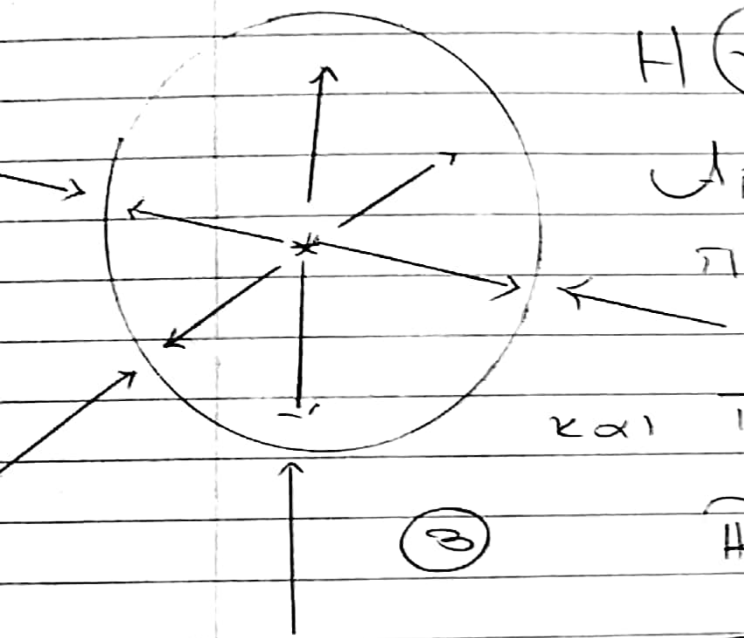
① Αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε η συστολή $r: \mathbb{R}^n \to \{x_0\}$ είναι περιστολή και συνεπώς αυτός ο χώρος είναι συσταλτός.

$$H(x, t) = (1-t)x + t x_0.$$

(2) $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Η συστολή

$r: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to S^n$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

είναι περιστολή, όπως δείχνει η ακόλουθη ομοτοπία:

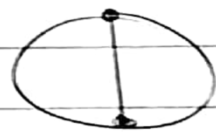


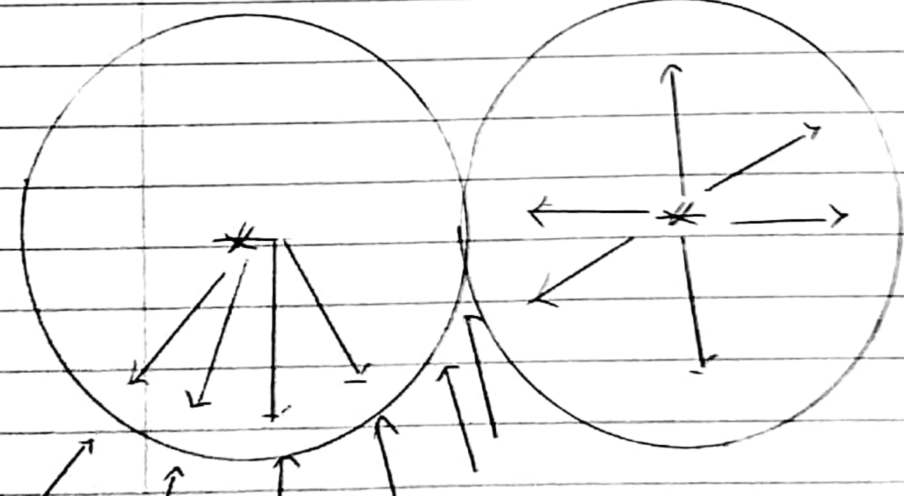
$$H(x,t) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}$$

Άρα ο $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ περιστέλλεται στην S^n και $S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$

και $\pi_1(S^n, \cdot) = \pi_1(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$

(3) $\mathbb{R}^2\setminus\{a,b\} \simeq \infty$

$\simeq$ 



Λήμμα (Lebesgue)

Έστω X συμπαγής μ.χ. και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $A \subseteq X$: $diam(A) < \delta$ το A περιέχεται σε κάποιο $U \in \mathcal{U}$.

<u>Αποδ</u> Αφού $\mathcal{U}$ κάλυμμα

$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathcal{U} : x \in U_x$ ανοικτό

$\Rightarrow x \in B(x, 2r_x) \subseteq U_x$

Οι μπάλες $\{B(x, r_x)\}_{x \in X}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X συμπ.

$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})$

Έστω $\delta = \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$
και $A \subseteq X$ τ.ω. $diam(A) < \delta$.

Έστω $y \in A$ και x_i : $y \in B(x_i, r_{x_i})$

Για τυχαίο $x \in A$ έχουμε

$d(x, x_i) < \delta + r_{x_i} \leq 2r_{x_i}$, δηλ.

$A \subseteq B(x_i, 2r_{x_i}) \subseteq U_{x_i}$

$\square$