①

Μάθημα 06 (06/03/2023)

Πρόταση: Έστω $X = U \cup V$ όπου U, V ανοικτά, απλά συνεκτικά (άρα κ.τ.σ.) με $U \cap V \neq \emptyset$ κ.τ.σ.

$\Rightarrow X$ απλά συνεκτικός.

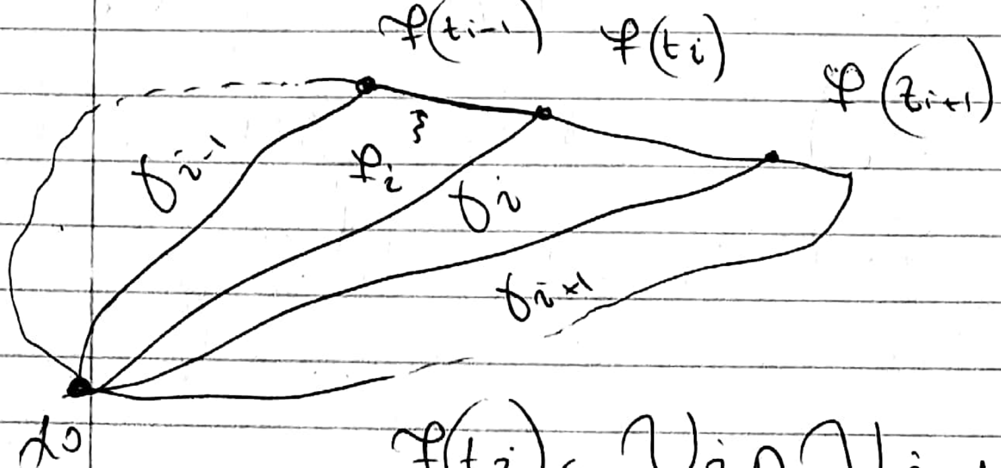
απόδ. Έστω $x_0 \in U \cap V$ και $\varphi: I \to X$ θηλειά στο x_0

Έστω δ ο αριθμός Lebesgue του ανοικτού καλύμματος $\varphi^{-1}(U)$, $\varphi^{-1}(V)$ του συμπ. I.

Επιλέγουμε φυσικό n : $\frac{1}{n} < \delta$ και θεωρούμε διαμέριση:

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, $t_i = \frac{i}{n}$.

Τότε $\forall i = 1, \dots, n$: $\varphi([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_i$ όπου $V_i = U$ ή V.



$\varphi(t_i) \in V_i \cap V_{i-1} \rightsquigarrow$ κ.τ.σ.

②

Μπορούμε να θεωρήσουμε ακόμα- τι $\gamma_i : I \to X$ από το x_0 στο $f(t_i)$ εντός της $U_i \cap U_{i-1}$ δηλ.

$$\gamma_i \subseteq U_i \cap U_{i-1}$$

Έστω f_i το τμήμα της f από το $f(t_{i-1})$ στο $f(t_i)$. Τυπικά

$$f_i(s) = f\big((1-s)t_{i-1} + s\,t_i\big),\ s \in I$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία.

$\gamma_{i-1} f_i \gamma_i^{-1}$ στο x_0 είναι εντός των απλά συνεκτικών U_{i-1}, άρα

$$\gamma_{i-1} \cdot f_i \cdot \gamma_i^{-1} \simeq C_{x_0}.$$

Έχουμε

$$f \simeq (f_1 \gamma_1^{-1})(\gamma_1 f_2 \gamma_2^{-1}) \cdots (\gamma_{n-1} f_n)$$

$\simeq C_{x_0} \cdot C_{x_0} \cdots \cdot C_{x_0}$

$\simeq C_{x_0}$

Τελικά $f \simeq C_{x_0} \Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \{1\}$

Στην ουσία αποδείξαμε κάτι γενικότερο:

③

Πρόταση

Αν $X = U \cup V$, U, V ανοικτά κ.τ.σ και $U \cap V \neq \phi$ κ.τ.σ, τότε

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \pi_1(U, x_0), \pi_1(V, x_0) \rangle$$

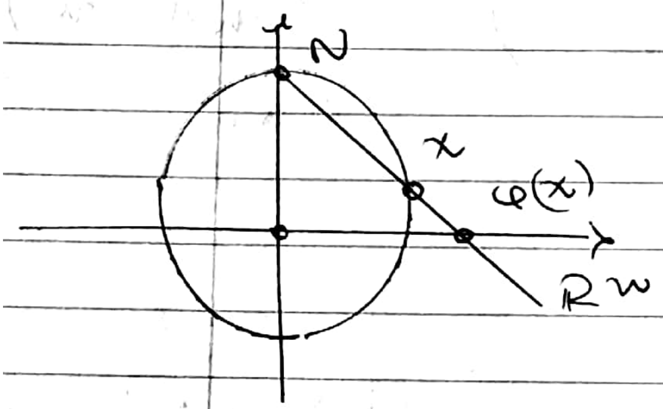
Ακριβέστερα,

$$\pi_1(X, x_0) = \langle (i_U)_*(\pi_1(U, x_0)), (i_V)_*(\pi_1(V, x_0)) \rangle$$

όπου i_U^*, i_V^* επαγόμενοι ομομορφισμοί των ενθέσεων $i_U : U \hookrightarrow X$ αντ.
$i_V : V \hookrightarrow X$

Θεώρημα: $\pi_1(S^n) = \{1\}$, $n \geq 2$.

αποδ: Έστω $N = (0, \dots, 1) \in S^n$ και $S = (0, \dots, -1)$ ο "βόρειος" και ο "νότιος" πόλος της S^n αντ.



Τα $S^n \setminus \{N\}$, $S^n \setminus \{S\}$ είναι ανοικτά και κάθε ένα απο αυτά ομοιομορφικά με το $\mathbb{R}^n$.

Πράγματι, $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ μέσω της στερεογραφικής προβολής.

$$\varphi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{1 - x^{n+1}}$$

φ ομοιομορφισμός με αντίστροφη

$$\varphi^{-1}(\underbrace{y_1, \dots, y_n}_{y}) = \left(\frac{2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right)$$

Επίσης, $S^n \setminus \{N\} \cong S^n \setminus \{S\}$.

μέσω του ομοιομορφισμού

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, -x_{n+1})$$

Συνεπώς, $\underbrace{S^n \setminus \{N\}}_{u} \cong \underbrace{S^n \setminus \{S\}}_{v} \cong \mathbb{R}^n$

και τα U, V είναι απλά συνεκτικά (και συμπίεστα)

Η τομή $U \cap V$ είναι κ.τ.σ.

$$U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right)$$

έτσι είναι κ.τ.σ. τ.χ αφού $n \geq 2$.

Από την προηγούμενη πρόταση

$\pi_1(S^n) = \{1\}$, $n \geq 2$.

Χώροι Επικάλυψης

Ορσ.: Έστω $\tilde{X}$ και X τ.χ.

Λέμε ότι ο $\tilde{X}$ επικαλύπτει τον X μέσω της $p: \tilde{X} \to X$
(ή p είναι απ. επικάλυψης)
(ή $\tilde{X}$ είναι χώρος επικάλυψης.)

αν:

(α) $p: \tilde{X} \to X$ συνεχής και επί

(β) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή $U_x \ni x$ τ.ω.

$p^{-1}(U_x)$ να είναι ξένη ένωση ανοικτών $(U_x^j)_{j \in J}$ καθένα από τα οποία είναι ομοιομορφικά μέσω της p επί του U_x. Ισ

$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{j \in J} V_x^j$, $V_x^j \subseteq \tilde{X}$ ανοι

και κάθε περιορισμός

$p|_{V_x^j}: V_x^j \to U_x$ ομοιομορφισμός

Το U_x λέγεται στοιχειώδης περιοχή, και τα V_x^j, $j \in J$.

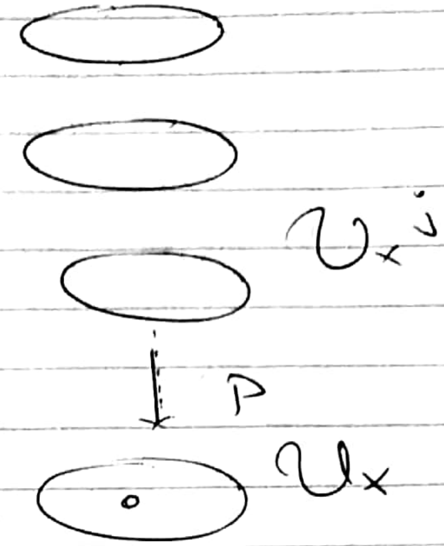
⑥

Συνιστώσες

Π.χ. η απεικόνιση

$p: \mathbb{R} \to S^1$ με

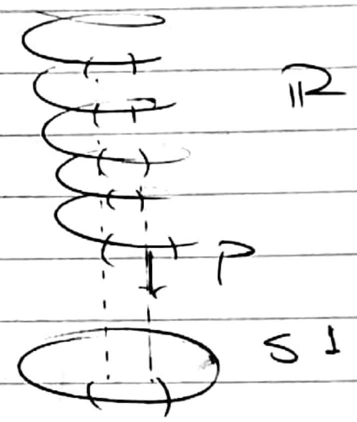
$p(x) = e^{2\pi i x}$ είναι προβολή επικάλυψης



(δηλ. ο $\mathbb{R}$ επικαλύπτει τον κύκλο S^1 μέσω της p).

Πράγματι, έστω
$p(x) = e^{2\pi i x}$

Θεωρούμε ως στ. περιοχή U_x το ανοικτό ημικύκλιο με "μέσο" το $e^{2\pi i x}$.



Τότε, $$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(x+k-\frac{1}{4},\ x+k+\frac{1}{4}\right)}_{U_x^k}$$

Κάθε περιορισμός $p_k: U_x^k \to U_x$ είναι συνεχής, 1-1 και επί και ανοικτή (ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό)

Άρα $p_k|$ είναι ομοιομορφισμός

$p: \mathbb{R} \to S^1$ είναι ανοικτή γιατί

(7)

απεικονίζει τα βασικά σε ανοικτά

($(a,b) \xmapsto{p}$ στα σημεία της S^1 μεταξύ $2\pi a$, και $2\pi b$)

$$S^n /_{x\sim(-x)} \cong \mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} /_\sim$$

όπου για $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$, $\lambda \neq 0$.

Θεωρούμε τη σύνθεση

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & S^n \arrow[r, "\pi"] & S^n / x\sim(-x) \end{tikzcd}$$

όπου $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

Η r είναι α.π. άρα και η φ είναι α.π. ως σύνθεση τέτοιων.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(x) = \varphi(y)$

$\Leftrightarrow$ $x \sim y$, άρα $\mathbb{RP}^n \cong S^n / x\sim(-x)$.