①

Μάθημα 07

Η απεικόνιση πηλίκο·

$\pi: S^n \to S^n/x\sim(-x) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n$

είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Πράγματι, θεωρούμε τον ομοιομορφ.

$\alpha: S^n \to S^n,\ \alpha(x) = -x$

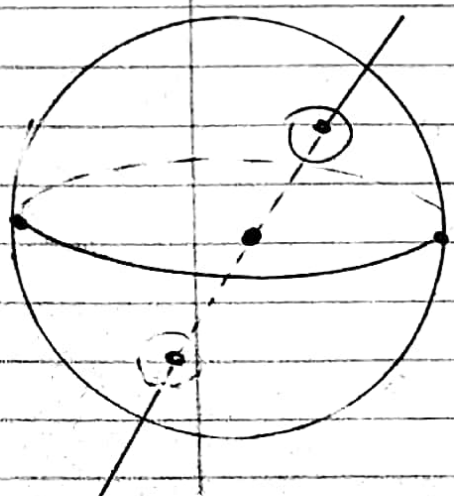
• π είναι ανοική: Έστω $U \subseteq S^n$ ανοικτό $\to$

$\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup \alpha(U)$ ανοικτό

ως ένωση ανοικτών $\to$ $\pi(U)$ ανοικτό. (π. απ.)

Έστω $x \in S^n$ και $y = \pi(x) \to$

$\pi^{-1}(y) = \{x, -x\}$



Θεωρούμε ανοική περιοχή U_x του x τ.ω

$U_x \cap \alpha(U_x) = \phi$

όπως στο σχήμα (γίνεται γιατί η ευκλείδεια απόσταση των $x, -x$ είναι 2).

(2)

Η εικόνα

$$V_{\pi(x)} = \pi(V_x) = \pi(\alpha(V_x))$$

είναι ανοικτή περιοχή του $y = \pi(x)$ (π ανοικτή) και από την επιλογή των V_x έχουμε:

$$\underbrace{\pi^{-1}(V_{\pi(x)})}_{\text{στοιχειώδης περιοχή}} = \underbrace{V_x \sqcup \alpha(V_x)}_{\text{συνιστώσες}}$$

Ο περιορισμός $\pi : V_x \to V_{\pi(x)}$ είναι ομοιομορφισμός, γιατί είναι συνεχής (ως περ. συνεχούς) 1-1 και επί και ανοικτή (ως περ. ανοικτής σε ανοικτό)

Ομοίως $\pi : \alpha(V_x) \to V_{\pi(x)}$ ομοιομορφισμός

- η $\pi_n : S^1 \to S^1$, $\pi_n(x) = x^n$ είναι απ. επικάλυψης.

- Οι $p_i : \tilde{X}_i \to X_i$ απ. επικαλ. για $i = 1, 2$

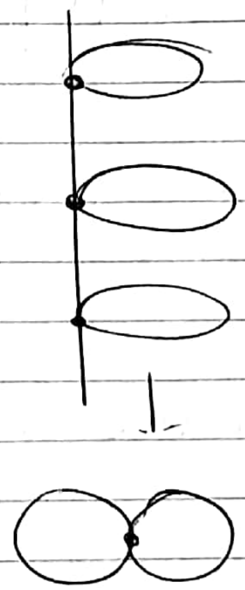
→ $p_1 \times p_2 : \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \to X_1 \times X_2$

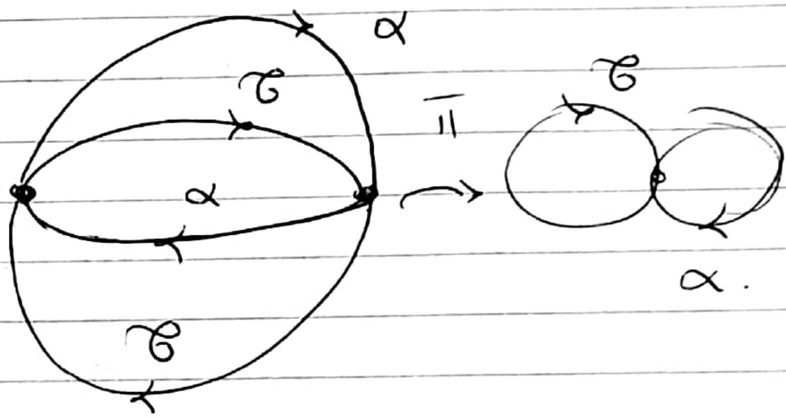
είναι απ. επικάλυψης.

⇝ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1 \times S^1 = T$

$p(x,y) = \left(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}\right)$ είναι

απεικόνιση επικάλυψης.





<u>Βασικές ιδιότητες</u>: → α.ε.

<u>Ορσ</u>: Έστω $p: \tilde{X} \to X$, I τ.χ

και $\varphi: I \to X$. Μια (συνεχής) απεικόνιση $\tilde{\varphi}: I \to \tilde{X}$ λέγεται <u>ανύψωση</u> της φ αν $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & X \end{tikzcd}$$

(4)

- Αν $y \in Y$, όπως ορσ, και $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : Y \to \tilde{X}$, ανυψώσεις της φ

$\Rightarrow \tilde{\varphi}_1(y), \tilde{\varphi}_2(y)$ ανήκουν στο νήμα της $\varphi(y)$, δηλ.

$\tilde{\varphi}_1(y), \tilde{\varphi}_2(y) \in p^{-1}(\varphi(y))$

Επίσης ίδιο νήμα + ίδια συνιστώσα

$\Rightarrow$ ισότητα

Πρόταση (μοναδικότητα των ανυψώσεων).

Έστω $p : \tilde{X} \to X$ α.ε. και

$\varphi : Y \to X$ συνεχής, με

$\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 : Y \to \tilde{X}$ ζεύγος ανυψώσεων της φ.

Αν Y συνεκτικός και $\tilde{\varphi}_1(y_0) = \tilde{\varphi}_2(y_0)$, για κάποιο $y_0 \in Y$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2}$

(5)

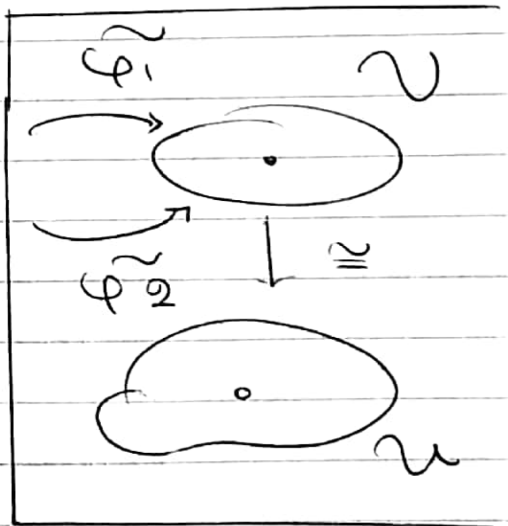
απόδειξη.

Έστω

$A = \{ y \in I \mid \tilde{\varphi}_1(y) = \tilde{\varphi}_2(y) \} \neq \emptyset$

αφού $y_0 \in A$.

- A ανοικτό: Έστω $y \in A$ ($\tilde{\varphi}_1(y) = \tilde{\varphi}_2(y)$) και U ο.π. του $\varphi(y)$. Θεωρούμε συνεκτική $\tilde{U}$ που περιέχει $\tilde{\varphi}_1(y) = \tilde{\varphi}_2(y)$



Η τομή

$\tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{\varphi}_2^{-1}(\tilde{U})$

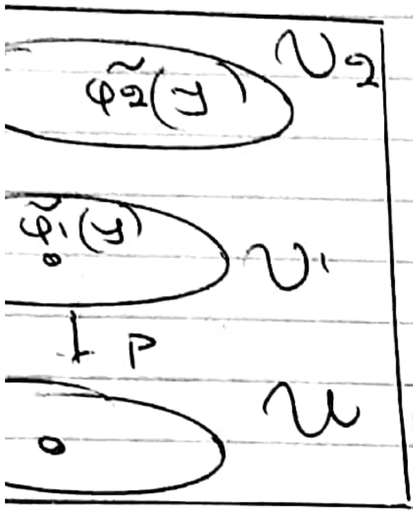
είναι ανοικτή περιοχή του y, η οποία περιέχεται στο A. $\rightarrow$ A ανοικτό

- A κλειστό (ισοδ. $I \setminus A$ ανοικτό)

Έστω $y \in I \setminus A$ και U ανοικτή περιοχή του $\varphi(y)$

- $\tilde{\varphi}_1(y) \neq \tilde{\varphi}_2(y)$ και ανήκουν.

στο ίδιο νήμα, αλλά ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες V_1, V_2 της U αντίστοιχα.



Η τομή $\tilde\varphi_1^{-1}(V_1)\cap\tilde\varphi_2^{-1}(V_2)$ είναι ανοιχτή περιοχή του y που περιέχεται στο $I\setminus A$.

$\Rightarrow$ A κλειστό

Τελικά, από συνεκτικότητα έχουμε $A = I$.

□

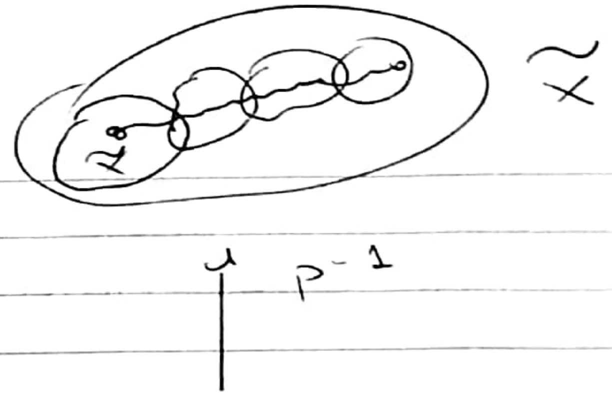
<u>Πρόταση</u> (ύπαρξη ανυψώσεων μονοπατιών)

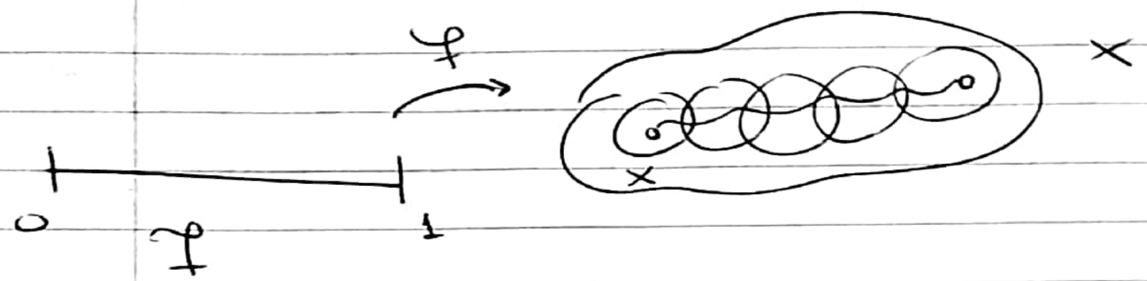
Έστω $p: \tilde X \to X$ επικάλυψη και $\varphi: I \to X$ μονοπάτι με $\varphi(0)=$

Αν $\tilde x \in p^{-1}(x)$, τότε υπάρχει <u>μοναδική ανύψωση</u> $\tilde\varphi: I \to \tilde X$ τ.ω. $\tilde\varphi(0)=\tilde x$

(φ)

απόδ :





απόδ Από το λήμμα Lebesgue

υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: κάθε υποδιάστημα του I της μορφής $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ να απεικονίζεται μέσω της φ σε μια στοιχειώδη περιοχή U_k.

Δηλ. $\varphi\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) \subseteq U_k$

Έστω V_0 η συνιστώσα που περιέχει το $\tilde{x} \in p^{-1}(\varphi(0))$

Ορίζουμε $\tilde{\varphi}$ μέσω του τύπου:

$$\left(p|_{V_0}\right)^{-1} \circ \varphi$$

Από την επιλογή της συνιστώσας V_0: $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}$ (εξ' ορισμού $p\tilde{\varphi} = \varphi$ στο $\left[0, \frac{1}{n}\right]$)

Υποθέτουμε ότι η (ανύψωση) $\tilde{\varphi}$ έχει ορισθεί μέχρι και το

$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$

Επεκτείνουμε τον ορσ της $\tilde{\varphi}$ στο $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ως εξής:

$$\varphi\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subseteq U_k$$

η τιμή $\tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right)$ έχει ορισθεί στο προηγούμενο βήμα και

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right) \in p^{-1}\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Έστω V_k η συνιστώσα της U_k που περιέχει $\tilde{\varphi}\left(\frac{k}{n}\right)$

Επεκτείνουμε $\tilde{\varphi}$ στο $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ μέσω του τύπου $\left(p|_{V_k}\right)^{-1} \circ \varphi$:

Από την νέα επιλογή της συνιστώσας V_k, ο "νέος" τύπος συμφωνεί με τον παλιό.

Η συνέχεια της φ έπεται από

9

το λήμμα της συγκόλλησης,
ενώ η μοναδικότητα από την
προηγούμενη πρόταση και την
συνεκτικότητα του I.

$\square$

<u>Πρόταση</u>. Έστω $p: \tilde{X} \to X$
α.ε. και $f, g: I \to X$ ομοτοπικά
μονοπάτια.
Αν $\tilde{f}, \tilde{g}$ ανυψώσεις των f, g
αντ. με $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, τότε
$\tilde{f}, \tilde{g}$ είναι ομοτοπικά, ιδιαιτέρως
$\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$

Δηλ. ανυψώσεις ομοτοπικών
μονοπατιών με την ίδια αρχή
είναι ομοτοπικές.

<u>απόδ.</u> Έστω $f \overset{H}{\simeq} g$. Θα ανυψώ-
σουμε την H σε ομοτοπία $\tilde{H}$ με
$\tilde{H}: I \times I \to \tilde{X}$ από $\tilde{f}$ σε $\tilde{g}$.

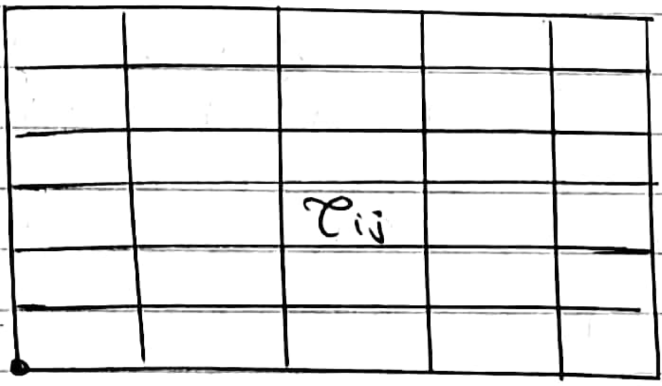
Από την συμπάγεια του $I \times I$
και το γεγονός ότι οι στοιχειώδεις
περιοχές αποτελούν ανοικτό κάλυμμα

του X, υπάρχει n (Λήμμα Lebesgue) έτσι ώστε κάθε τετράγωνο

$$\tau_{ij} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$$

του $I \times I$ να απεικονίζεται μέσω της H εντός στοιχειώδους περ. U_{ij}

$I \times I$



Δηλ.

$H(\tau_{ij}) \subseteq U_{ij}$

Ορίζουμε $\tilde{H}(0,0) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\psi}(0) \in p^{-1}(p_{f(0)})$

Επεκτείνουμε ορίζοντας πρώτα τα τετραγωνάκια της 1ης γραμμής, μετά της 2ης, ...

Υποθέτουμε ότι η H έχει οριστεί σε όλα τα τετραγωνάκια πριν το τ_{ij} την επεκτείνουμε στο τ_{ij} ως εξής:

Η ανύψωση $\tilde{H}$ έχει ορισθεί στο $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ και $\tilde{H}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \in p^{-1}\left(H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right)$

Έστω V_{ij} η ~~σσσ~~ συνιστώσα της U_{ij} που περιέχει το $\tilde{H}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$.

και επεκτείνουμε την $\tilde{H}$ στο τ_{ij} μέσω του τύπου $(p|V_{ij})^{-1} \circ H$

$$: \tau_{ij} \to V_{ij} \subseteq \tilde{X}$$

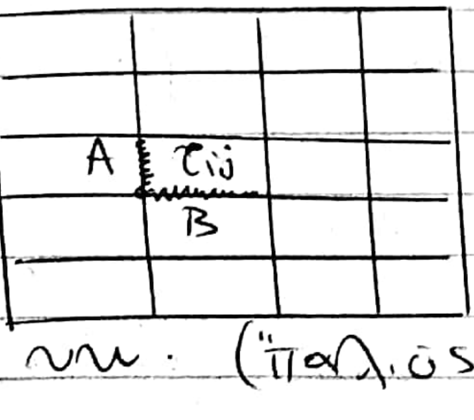
Εξ' ορισμού $p \circ \tilde{H} = H$ στο τ_{ij}

Από την επιλογή της συνιστώσας V_{ij} ο νέος τύπος ταυτίζεται με τον παλιό στο $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ (ίδιο σημείο ίδια συνιστώσα)

(1)

Μάθημα 08

συνέχεια απόδειξης.



Επιπλέον, ο νέος τύπος (επέκταση) συμφωνεί στις πλευρές του τ_{ij} που η $\tilde{H}$ είναι ήδη ορισμένη. ("παλιός")

② ③

Οι πλευρές του τ_{ij} που μπορεί να υπάρχει "αλληλοκάλυψη" των δυο τύπων είναι η A ή και η B.

Σε κάθε μια από τις περιπτώσεις αυτές (A ή B) οι δυο τύποι περιορισμένοι (στο A ή B) ορίζουν μονοπάτια με την ίδια αρχή $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ που είναι ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού. $\tilde{H}$

$$\pi \circ \left(H\left(t, \frac{j}{n}\right), \ t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right)$$

άρα από μοναδικότητα ανυψώσεων μονοπατιών οι δυο τύποι ταυτίζονται.

Από λήμμα συγκόλλησης η $\tilde{H}$ είναι συνεχής.

Δείχνουμε ότι η $\tilde{H}$ είναι ομοτοπία μεταξύ των $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$.

• $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\varphi}(s)$

Πράγματι τα δυο αυτά μονοπάτια είναι ανυψώσεις του ίδιου

③

μονοπατιού (του φ) με ίδια αρχή: $\tilde{H}(0,0) = \tilde{\varphi}(0)$, άρα είναι ίσα.

- $\tilde{H}(s,1) = \tilde{g}(s)$. ως ανυψώσεις του ίδιου μονοπατιού (του g) με την ίδια αρχή $\tilde{H}(0,1) = \tilde{g}(0)$
- $\tilde{H}(0,t) = \tilde{\varphi}(0) = \tilde{g}(0)$, $\forall t \in I$ ως ανυψώσεις του σταθ. μονοπατιού ($\varphi(0)$) με ίδια αρχή $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{H}(0,0)$.
- $\tilde{H}(1,t) = \tilde{\varphi}(1) = \tilde{g}(1)$. Το $\tilde{H}(1,t)$ είναι σταθ. ως ανύψωση του σταθ. μονοπατιού $H(1,t) = \varphi(1) = g(1)$

$\Rightarrow \tilde{H}(1,t) = \underbrace{\tilde{H}(1,0)}_{\tilde{\varphi}(1)} = \underbrace{\tilde{H}(1,1)}_{\tilde{g}(1)}$ $\forall t \in I$

I.

<u>Πρόταση</u>: $p: \tilde{X} \to X$ επικάλυψη με X συνεκτικό. Ο πληθάριθμος $|p^{-1}(x)|$ είναι σταθ. $\forall x \in X$.

Από: $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$, $\forall x, y \in X$

<u>απόδ</u> Έστω $x_0 \in X$ και

$$A = \{ x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |p^{-1}(x_0)| \} \neq \emptyset$$

<u>Α ανοικτό:</u> Έστω $x \in A$ και U_x σ.τ.π. του x. Τότε $U_x \subseteq A$ και άρα Α ανοικτό ξ

$$p^{-1}(U_x) = \bigsqcup_{j \in J} U_x^j, \text{ δηλ.}$$

$$\forall y \in U_x : |p^{-1}(y)| = |J|$$

<u>Α κλειστό $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ ανοικτό</u>

Το $X \setminus A$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών, για ένα ανοικτό
και για κάθε πληθάριθμο $\neq |p^{-1}(x_0)|$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $p: \tilde{X} \to X$ επικαλ., $x_0 \in X$.

Τότε, $\forall \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

είναι μονομορφισμός.

Επιπλέον, η $\mathrm{Im}P_*$ αποτελείται από ~~τις~~ τις κλάσεις θηλειών στο x_0 των οποίων οι ανυψώσεις με αρχή το $\tilde{x}_0$ είναι θηλειές στο $\tilde{x}_0$.

<u>αποδ</u>

<u>P_* 1-1:</u> αν $P_*[\tilde{f}] = P_*[\tilde{g}]$

$\tilde{f}, \tilde{g}$ θηλειές στο $\tilde{x}_0$

$\Rightarrow p\circ\tilde{f} \simeq p\circ\tilde{g}$. Έπεται ότι $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ ως ανυψώσεις των ομοτοπικών μονοπατιών $p\circ\tilde{f}, p\circ\tilde{g}$ με ίδια αρχή

$\Rightarrow [\tilde{f}] = [\tilde{g}]$.

Έστω f θηλειά στο x_0 και $\tilde{f}$ ανύψωση της f, θηλειά στο $\tilde{x}_0$. $\Rightarrow$

$[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ και

$P_*[\tilde{f}] = [p\circ\tilde{f}] = [f] \in \mathrm{Im}P_*$

Αντίστροφα, έστω $[f] \in \mathrm{Im}P_*$ και $\tilde{f}$ ανύψωση του f με αρχή $\tilde{x}_0$.

⑥

Αφού $[f] \in Im\, p_*$,

$[f] = p_*[\tilde{g}] = [p \circ \tilde{g}] \Rightarrow f \simeq p\circ\tilde{g}$

$\tilde{g}$ ~~κλειστή~~ θηλειά στο $\tilde{x}_0$.

$\Rightarrow \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ ως ανυψώσεις μονοπατιών (ομοτοπ.) f, $p\circ\tilde{g}$ με την ίδια αρχή $\tilde{x}_0$.

Ιδιαιτέρως, έχω το ίδιο τέλος.

Άρα $\tilde{f}$ θηλειά στο $\tilde{x}_0$. □

<u>Πρόταση</u>

Έστω $p: \tilde{X} \to X$ επικάλ., $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ όπου $X, \tilde{X}$ είναι κ.τ.σ. Τότε

$$|p^{-1}(x_0)| = [\underbrace{\pi_1(X, x_0)}_{G} : \underbrace{p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)}_{H = Im\, p_*}]$$

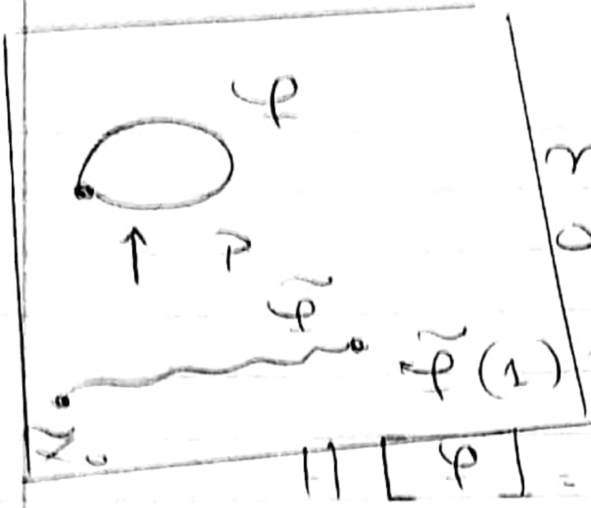
<u>απόδειξη</u>: Ορίζουμε

$\varphi : \{\text{δεξιά σύμπλοκα}\} \to p^{-1}(x_0)$

ως εξής: f θηλειά στο x_0

$\varphi(H[f]) = \tilde{f}(1)$, όπου $\tilde{f}$ ανύψωση της f με αρχή $\tilde{x}_0$

(ρ)



η φ είναι καλά ορσ.:

Έστω ότι

$H[\varphi] = H[g] \Rightarrow$

$[\varphi] = [h]\cdot[g]$, $[h] \in H$

$\Rightarrow \varphi \simeq h\cdot g$.

Θεωρούμε ανυψώσεις $\tilde{\varphi}, \tilde{g}, \tilde{h}$ των φ, g, h αντ. με αρχή το $\tilde{x}_0$

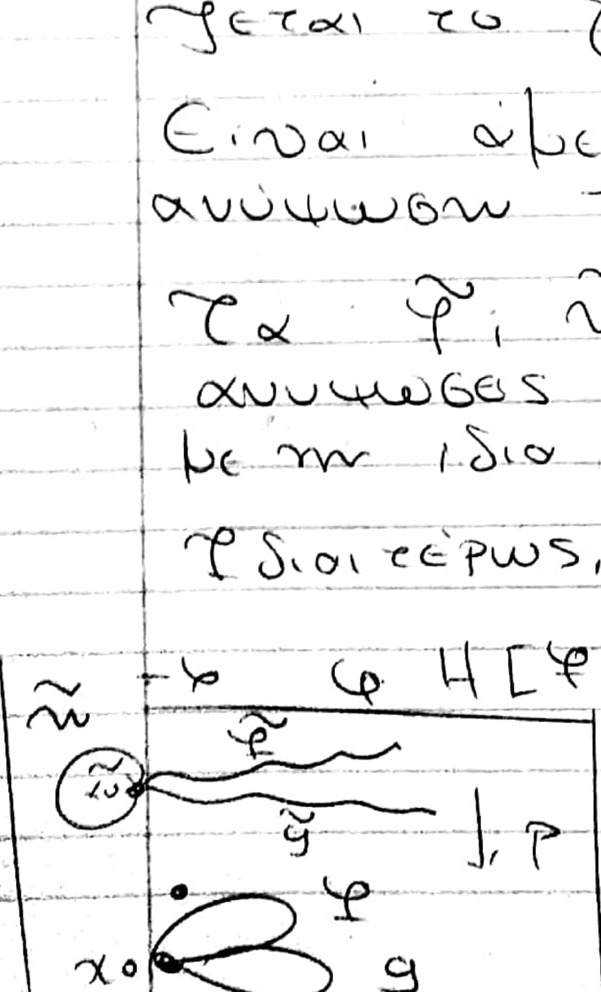
Εφόσον $[h] \in \operatorname{Im} p_* \Rightarrow \tilde{h}$ είναι θηλεία στο $\tilde{x}_0$ άρα ορίζεται το γινόμενο $\tilde{h}\circ\tilde{g}$.

Είναι άμεσο ότι $\tilde{h}\circ\tilde{g}$ είναι ανύψωση της $h\cdot g$.

Τα $\tilde{\varphi}$, $\tilde{h}\cdot\tilde{g}$ είναι ομοτοπικά ως ανυψώσεις των ομοτοπικών φ, $h\cdot g$ με την ίδια αρχή.

Ιδιαιτέρως, $\tilde{\varphi}(1) = \tilde{h}\cdot\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1)$.

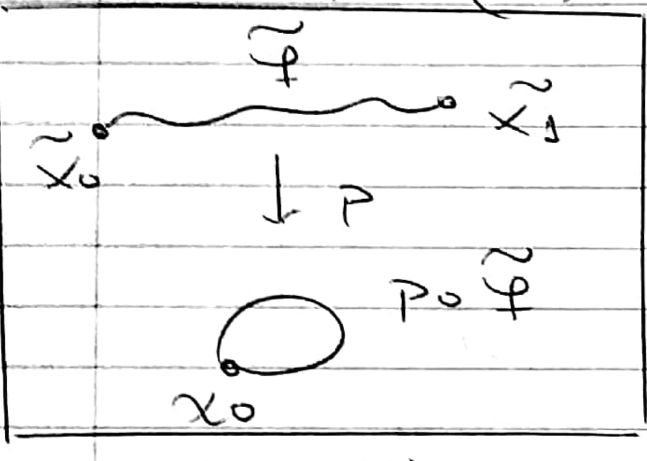
$\Rightarrow \varphi H[\varphi] = \varphi H[g]$



<u>φ επί</u>

Έστω $\tilde{X}$ κ.τ.σ. $\forall \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ υπάρχει $\tilde{f}$ του $\tilde{X}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$.

$\Rightarrow p^{-1}(x_0) \ni \tilde{x}_1 = \varphi(H[p\circ\tilde{f}])$



<u>φ 1-1</u>

Έστω f, g θηλειές στο x_0 με $\varphi(H[f]) = \varphi(H[g])$.

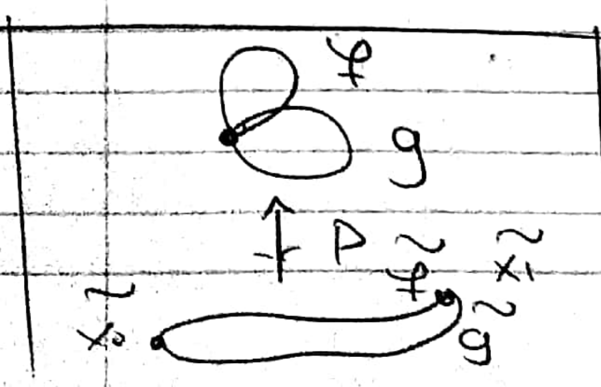
Αν $\tilde{f}, \tilde{g}$ ανυψώσεις των f, g αντ. με αρχή το $\tilde{x}_0$ $\Rightarrow$

$\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ και $\tilde{f}\cdot\tilde{g}^{-1}$ θηλειά στο $\tilde{x}_0$. Έτσι:

$p_*(\tilde{f}\cdot\tilde{g}^{-1}) = [p\circ\tilde{f}\cdot\tilde{g}^{-1}]$

$= [p\circ\tilde{f}\cdot p\circ\tilde{g}^{-1}] = [f][g]^{-1} \in H$

$\Rightarrow H[f] = H[g]$



(9)

Θεωρ: Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι η άπειρη κυκλική $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

απόδ Σύμφωνα με το προηγούμενο έστω $p: \mathbb{R} \to S^1$ η επικάλυψη $p(x) = e^{2\pi i x}$.

$x_0 = 1,\ \tilde{x}_0 = 0 \to p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Επίσης $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{1\} \Rightarrow$

$\operatorname{Im} p_* = \{1\}$. Έχουμε

$\varphi: \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ 1-1 και επί

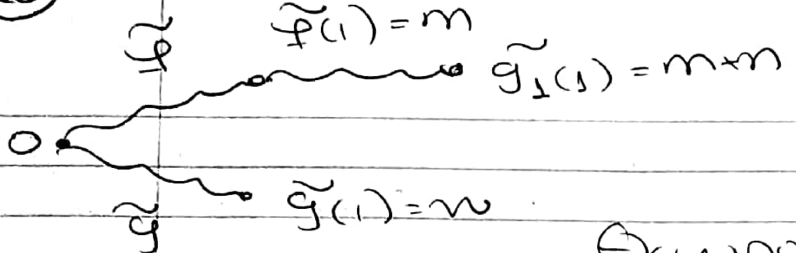
(που ορίζεται όπως πριν)

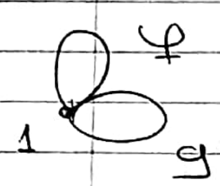
Θα δείξουμε ότι φ είναι ομομορφ. ομάδων, άρα είναι ισομορφισμός.

Έστω f, g θηλειές στο 1 και $\tilde{f}, \tilde{g}$ ανυψώσεις των f, g αντ.

με αρχή το $0 = \tilde{x}_0$.

ΘΔο $\varphi([f] \cdot [g]) = \varphi[f] + \varphi[g]$.





Θεωρούμε μονοπάτι $\tilde g_1(s) = \tilde g(s) + m$ (μετατόπιση του $\tilde g$ κατά m)

$\tilde g_1(0) = \tilde g(0) + m = m$. Ορίζεται το γινόμενο $\tilde\varphi \cdot \tilde g_1$ και αποτελεί ανύψωση του $\varphi \cdot g$ με αρχή το x_0.

$p \circ \tilde\varphi \cdot \tilde g_1(s) = (p\circ\tilde\varphi \cdot p\circ\tilde g_1)(s)$

$= \varphi \cdot e^{2\pi i (g(s)+m)}$

$= (\varphi \cdot g)(s)$.

Συνεπώς $\phi([\varphi]\cdot[g]) = (\tilde\varphi \cdot \tilde g_1)(1)$

$= \tilde g_1(1) = \tilde g(1) + m = m + n$. □

<u>Θεώρημα</u> $\pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$.

<u>απόδ.</u>

Έχουμε την επικάλυψη

(11)

$$S^n \to S^n/_{x\sim(-x)} \cong \mathbb{R}P^n$$

$\pi_1(S^n) = \{1\}$, $\forall n \geq 2$. Επίσης κάθε ίνα είναι σύνολο της μορφής $\{x, -x\}$. Από την προηγούμενη πρόταση:

$$|\pi_1(\mathbb{R}P^n)| = |p^{-1}(x_0)| = 2$$

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2.$$