(11) $S^n \to S^n/x\sim(-x) \cong \mathbb{RP}^n$.

$\pi_1(S^n)=\{1\}$, $\forall n \geq 2$. Επίσης κάθε ίνα είναι σύνολο της μορφής $\{x,-x\}$. Από την προηγούμενη πρόταση:
$|\pi_1(\mathbb{RP}^n)| = |p^{-1}(x_0)| = 2$.

$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2$.

<u>Μάθημα 9ο</u> (20/03/2023) (1)

<u>Θεώρημα</u> Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.χ. και $x_i \in X_i$ με $x=(x_1,\dots,x_n)$.

$\Rightarrow \pi_1(X_1\times\dots\times X_n, x) \cong \pi_1(X_1,x_1)\times\dots\times\pi_1(X_n,x_n)$

<u>απόδ.</u>:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i\circ f"'] & X_1\times\dots\times X_n \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

η $\varphi : \pi_1(X_1\times\dots\times X_n, x) \to \pi_1(X_1,x_1)\times\dots\times\pi_1(X_n,x_n)$

με $\varphi([f]) = ([p_1\circ f],\dots,[p_n\circ f])$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

- <u>ομομορφ.</u> ✓
- <u>επί</u>: αν f_i θηλειά στο x_i, $i=1,\dots,n$
  $\Rightarrow f = (f_1,\dots,f_n)$

1-1. Αν $\varphi[f] = 1 \to P_i \circ f \overset{H_i}{\simeq} c_{x_i}$ ②

$\to \varphi \overset{H}{\simeq} c_x$ με $H = \prod_{i=1}^{n} H_i = H_1 \times \dots \times H_n$

Παράδειγμα: • $\pi_1(\underbrace{S^1 \times S^1}_{T}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

• $\pi_1(S^1 \times D^2) = \mathbb{Z} \times \{1\} = \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Εφαρμογές}}$

Λήμμα. Δεν υπάρχει συστολή $r: D^2 \to S^1$

απόδ: Αν υπάρχει τέτοια r τότε

επάγει επιμορφισμό:

$r_*: \underbrace{\pi_1(D^2, *)}_{\{1\}} \to \underbrace{\pi_1(S^1, *)}_{\mathbb{Z}}$.

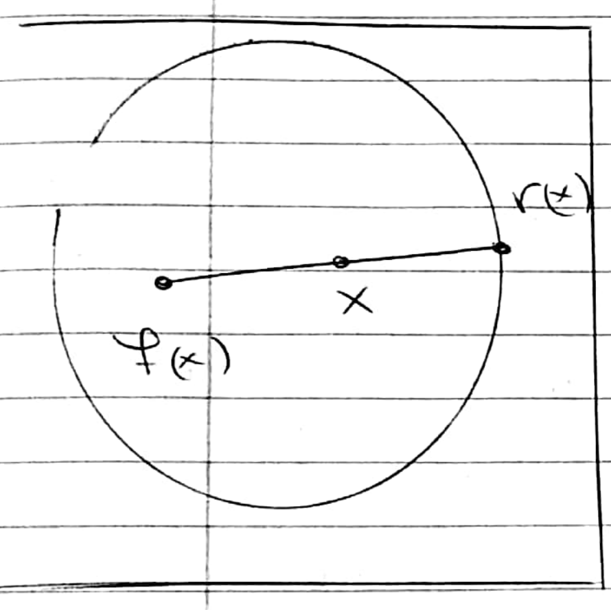
άτοπο, γιατί $\pi_1(D^2)$ πεπερασμένη

$\pi_1(S^1)$ άπειρη

ΙΙ

<u>Θεώρημα</u> (σταθερού σημείου του Brouwer).

Αν $\varphi: D^2 \to D^2$, τότε υπάρχει $x \in D^2 : \varphi(x) = x$



<u>Απόδ</u>:

Ας υποθέσουμε ότι $\varphi(x) \neq x,\ \forall x \in D^2$

Μπορούμε να θεωρήσουμε την ημιευθεία $[\varphi(x), x)$ με αρχή το $\varphi(x)$ και συμβ $r(x)$

το σημείο τομής αυτής με το σύνορο του δίσκου $\partial D^2 = S^1$ (και $r(x) \neq \varphi(x)$)

$\Rightarrow r: D^2 \to S^1$ συστολή, <u>άτοπο</u>, από το λήμμα. #

<u>Θεώρημα</u> $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$, για $n \neq 2$

<u>απόδ</u> $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}$ (αν $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \Rightarrow$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{*\} \cong \mathbb{R} \setminus \{*\}$ $\leadsto$ δύο συνεκτικές συνιστώσες

$\leadsto$ μια συνεκτική συν. άτοπο)

④

Έστω ότι $n \neq 2$ και $\mathbb{R}^n \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}_{\cong S^{n-1}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}}_{\cong S^1}$.

$\Rightarrow \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} \cong \underbrace{\pi_1(S^{n-1})}_{\{1\}}$, άτοπο.

$\square$

Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

Έστω $\alpha = [\varphi]$, όπου $\varphi(s) = e^{2\pi i s}$ γεννήτορας της $\pi_1(S^1, 1)$

Για μια συνεχή απεικόνιση $\varphi: S^1 \to S^1$ ορίζουμε τον βαθμό της φ: $\deg \varphi \in \mathbb{Z}$ ως εξής

$$\underbrace{\pi_1(S^1, 1)}_{= \langle \alpha \rangle} \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(S^1, \varphi(1)) \xrightarrow{\Phi_w} \underbrace{\pi_1(S^1, 1)}_{= \langle \alpha \rangle}.$$

όπου w μονοπάτι από $\varphi(1)$ σε 1 και Φ_w ο ισομορφ. αλλαγής σημείο

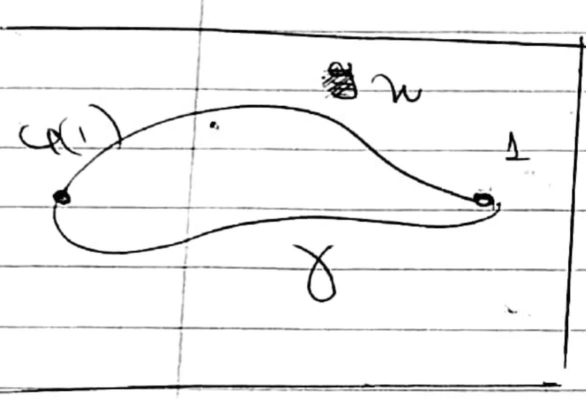
$$\Phi_w([g]) = [w]^{-1}[g][w]$$

υπάρχει ακέραιος n με

$\Phi_h \circ \varphi_*(\alpha) = n\alpha$. Ορίζουμε

$\deg \varphi = n$.

- Ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του h.



$$[h^{-1}][g][h] = \underbrace{[h^{-1}][\gamma]}_{\in \pi_1(S^1)}\underbrace{[\gamma^{-1}][g][h]}_{\in \pi_1(S^1)}$$

$\pi_1(S^1)$ αβελιανή

$$\Longrightarrow [\gamma^{-1}][g][h][h^{-1}][\gamma] = [\gamma^{-1}][g][\gamma] = \Phi_\gamma([g]).$$

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Αν $\varphi : S^1 \to S^1$ σταθ., τότε $\deg \varphi = 0$, αφού $\operatorname{Im}\varphi_* = \underbrace{\{0\}}_{(\mathbb{Z},+)}$

(2) αν $\varphi(x) = x^n : S^1 \to S^1$

τότε $\deg \varphi = n$. Εδώ $\varphi(1) = 1$, οπότε μπορώ να επιλέξω $h = c_1$

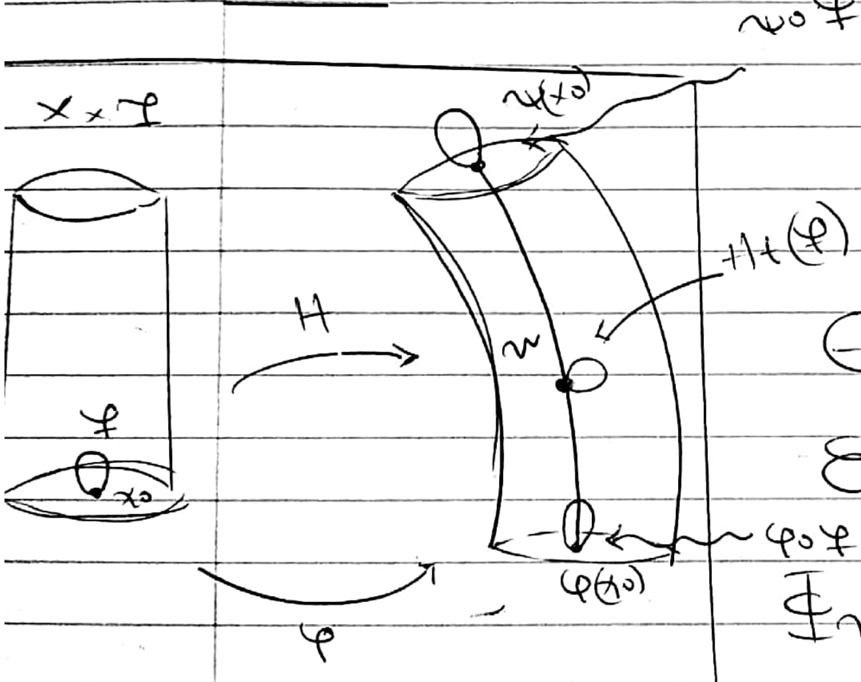
$$\Rightarrow \varphi_*(\alpha) = [\varphi \circ f] = [e^{2\pi i n s}] = \underbrace{n\alpha}_{\text{προσθ. συμβ.}}$$

⑥

Λήμμα: Αν $\varphi, \psi : X \to Y$ συνεχείς και $x_0 \in X$. Αν $\varphi \simeq \psi$, τότε υπάρχει μονοπάτι από το $\varphi(x_0)$ στο $\psi(x_0)$ ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, "\psi_*"] & \\
\pi_1(Y, \varphi(x_0)) \arrow[r, "\Phi_w"] & \pi_1(Y, \psi(x_0))
\end{tikzcd}$$

απόδ



Έστω H ομοτοπία από την φ στην ψ.

Έστω $w(t) = H(x_0, t)$

Έχουμε ότι:

$$\Phi_w \circ \varphi_*[f] = \psi_*[f]$$

$$\Leftrightarrow [w^{-1} \cdot (\varphi \circ f) \cdot w] = [\psi \circ f] \Leftrightarrow$$

$$w \cdot (\psi \circ f) w^{-1} \simeq \varphi \circ f$$ που ισχύει

η ομοτοπία είναι $w_t \cdot H_t(f) \cdot w_t^{-1}$

όπου u_t ο περιορισμός στο $[0,t]$ με κατάλληλη παραμέτρηση. (δηλ. $u_t(s) = u(ts)$, $s \in [0,1]$).

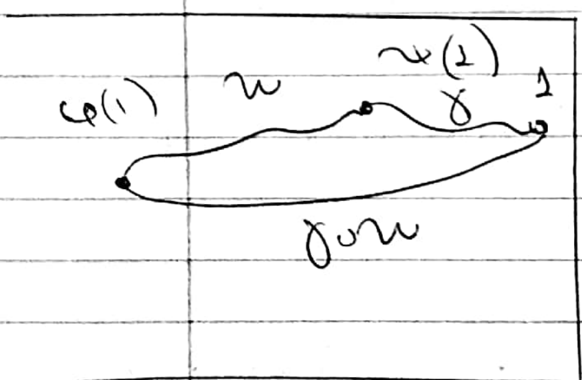
Πρόταση: Αν $\varphi, \psi : S^1 \to S^1$ συνεχείς και $\psi \simeq \varphi \Rightarrow \boxed{\deg\varphi = \deg\psi}$

απόδ: Από το προηγούμενο λήμμα το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1, 1) \arrow[d, "\varphi_*"'] \arrow[dr, "\psi_*"] & \\
\pi_1(S^1, \varphi(1)) \arrow[r, "\Phi_u"] & \pi_1(S^1, \psi(1))
\end{tikzcd}$$

όπου u μονοπάτι από το $\varphi(1)$ στο $\psi(1)$

Έστω γ μονοπάτι του S^1 από το $\psi(1)$ στο 1.



$$\Rightarrow \Phi_\gamma \circ \psi_* = \Phi_\gamma \circ \Phi_u \circ \varphi_* = \Phi_{u\gamma} \circ \varphi_*$$

(8)

Εφόσον, ο βαθμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του ομοτοπικού έχουμε $\deg\varphi = \deg\psi$.

$\square$

Θεώρημα: Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο:

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$$

$n > 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$. Δηλ. υπάρχει $x \in \mathbb{C}$: $\varphi(x) = 0$.

απόδειξη. Θεωρούμε την συνεχή απεικόνιση

$$\hat{\varphi} : S^1 \to S^1 : \hat{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$$

- Εφόσον $\varphi \neq 0$ στο D^2 ορίζεται ομοτοπία

$$H : S^1 \times I \to S^1 ;\ H(x,t) = \frac{\varphi(x \cdot t)}{\|\varphi(x \cdot t)\|}$$

από την σταθερή στην $\hat{\varphi}$.

$\to \deg \hat{\varphi} = 0$.

- Εφόσον η $\hat{\varphi}$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Int}(D^2)$

τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ομοτοπία

$F: S^1\times \mathbb{R} \to S^1$ με $F(x,t) = \dfrac{k(x,t)}{\|k(x,t)\|}$

όπου $k(x,t) = x^n + (a_1 t x^{n-1} + \dots + t^n a_n)$

$= t^n \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$

Η F είναι ομοτοπία από το x^n σε $\varphi \Rightarrow \deg \varphi = n \neq 0$ άτοπο $\square$

<u>Θεώρημα</u> Δεν υπάρχει συνεχής $\varphi: S^2 \to S^1$ τ.ω. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ $\forall x \in S^2$.

<u>απόδειξη</u> Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια $\varphi: S^2 \to S^1$ με $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\forall x \in S^2$

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\ \mathbb{RP}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{RP}^1 \cong S^1 \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε τις συνήθεις επικαλύψεις p_1, p_2 όπως στο σχήμα:

Εφόσον φ διατηρεί τα αντιποδικά σημεία επάγει συνεχή.

$g: \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^1$, η οποία κάνει το προηγούμενο διάγραμμα μεταθετικό

$$\Rightarrow g_*: \underbrace{\pi_1(\mathbb{RP}^2, *)}_{\mathbb{Z}_2} \to \underbrace{\pi_1(\mathbb{RP}^1, *)}_{\mathbb{Z}}$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} g_* = 1$, γιατί στην 1η ομάδα κάθε στοιχείο έχει πεπερασμένη τάξη, ενώ στη 2η το μοναδικό στοιχείο πεπερ. τάξης είναι το 1.

Αν θεωρήσω μονοπάτι α με αντιποδικά σημεία $\Rightarrow$ $\varphi \circ \alpha$ μονοπάτι με αντιποδικά σημεία. (άρα δεν είναι θηλειά

$\Rightarrow [P_1 \circ (\varphi \circ \alpha)] \notin \operatorname{Im} P_{1*}$

Όμως,

$\cancel{P_* \circ \varphi_*(}$

$P_{1*}[\varphi \circ \alpha] = g_* P_{2*}[\alpha] = 1 \in \operatorname{Im} P_*$
$= \{1\}$

άτοπο.

$\square$