(1)

Μάθημα 10

Borsuk - Ulam: (για $n=2$)

$f: S^2 \to \mathbb{R}^2$ συνεχής. Τότε υπάρχει $x \in S^2$: $f(x) = f(-x)$ ($\Rightarrow$ δεν είναι 1-1).

απόδ. Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^2$. Τότε ορίζεται $g: S^2 \to S^1$ με τύπο

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$$

Παρατηρούμε ότι $g(x) = -g(-x)$ (g συν.) $\Rightarrow$ άτοπο από τα προηγ. (για $n=1$ άσκηση)

Seifert - Van Kampen.

Έστω X τ.χ., $X = U \cup V$ όπου U, V ανοικτά κ.τ.σ. με $U \cap V \neq \varnothing$ κ.τ.σ.

Έστω $x_0 \in U \cap V$. Το μεταθετικό διάγραμμα από τις αντίστοιχες ενθέσεις:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, hook, "k"] & \\ U\cap V \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "j"'] & & X \\ & V \arrow[ur, hook, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

μας δίνει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(U,x_0) \arrow[d, hook, "i_U"] \arrow[dr, bend left, "k_*"] & \\ \pi_1(U\cap V,x_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & \pi_1(U,x_0) * \pi_1(V,x_0) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(X,x_0) \\ & \pi_1(V,x_0) \arrow[u, hook, "i_V"'] \arrow[ur, bend right, "\lambda_*"'] & \end{tikzcd}$$

όπου i_U, i_V οι ενθέσεις των παραγόντων στο ελεύθερο γινόμενο. Από την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων γινομένων υπάρχει φ (όπως στο διάγραμμα) που επεκτείνει τις k_*, λ_*

- Έστω $[\gamma] \in \pi_1(U\cap V, x_0)$. Από την μεταθ. του διαγράμματος

$$\varphi(i_*[\gamma]) = k_* i_*[\gamma] = \lambda_* j_*[\gamma] = \varphi(j_*[\gamma])$$

$$\Rightarrow i_*([\gamma])\left(j_*[\gamma]\right)^{-1} \in \ker\varphi.$$

(3)

Θεώρημα (Seifert - Van Kampen)

Εστω $X = U \cup V$, U, V ανοικτά κ.τ.σ και $U \cap V \neq \phi$ κ.τ.σ. Για κάθε $x_0 \in U \cap V$, ο ομομορφισμός

$$\varphi : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

είναι επί και ο πυρήνας του $\ker \varphi$ είναι η κανονική υποομάδα N που παράγεται από τις διαφορές

$$i_*[\gamma]\left(j_*[\gamma]\right)^{-1}, \; [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$$

Δηλ.

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N}$$

απόδ φ επί: Εχουμε αποδείξει ότι

$$\pi_1(X, x_0) = \langle k_*(\pi_1(U, x_0)), \lambda_*(\pi_1(V, x_0)) \rangle$$

Εφόσον
$$\varphi|_{\pi_1(U, x_0)} = k_*$$
$$\varphi|_{\pi_1(V, x_0)} = \lambda_*$$
έπεται ότι

$$\operatorname{Im}\varphi \supseteq \langle \operatorname{Im}k_*, \operatorname{Im}\lambda_* \rangle = \pi_1(X, x_0)$$

④

Είδαμε ότι
$$\left\{ i_*[\gamma]\left(j_*[\gamma]\right)^{-1} \,\middle|\, [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \right\} \subseteq \ker\varphi.$$

$\Rightarrow N \subseteq \ker\varphi.$

Θ.δ.ο $\ker\varphi \subseteq N$

- Γράφουμε $f \underset{A}{\simeq} g$ αν $\operatorname{Im} f, \operatorname{Im} g \subseteq A$ και υπάρχει ομοτοπία που λαμβάνει χώρα στο A όπου $A = U$ ή V ή $U \cap V$ ή X.

- Συμβολίζουμε $[\gamma]_A$, όπου $[\gamma] \in \pi_1(A, x_0)$, $A = U, V, U \cap V, X$

Π.χ. $i_*([\gamma]_{U\cap V}) = [\gamma]_U$

$k_*([\gamma]_U) = [\gamma]_X$

- Συμβ: $*$ το γινόμενο στο ελεύθερο γινόμενο, $\cdot$ το γινόμενο μονοπατιών.

Με την χρήση των προηγούμενων ο τύπος για την φ γράφεται

αν $g = [\alpha_1]_U * [\alpha_2]_V * \cdots * [\alpha_m]_V \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$

(5)

$$\varphi(g) = \varphi([\alpha_1]_w) \cdots \varphi([\alpha_m]_w)$$
$$= [\alpha_1]_x \cdots [\alpha_m]_x = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]_x$$

Ας υποθέσουμε ότι $g \in \ker\varphi$

Θ.δ.ο. $g \in N$

- $g \in \ker\varphi \to \varphi(g) = 1 \to \alpha_1 \cdots \alpha_m \underset{x}{\simeq} c_{x_0}$

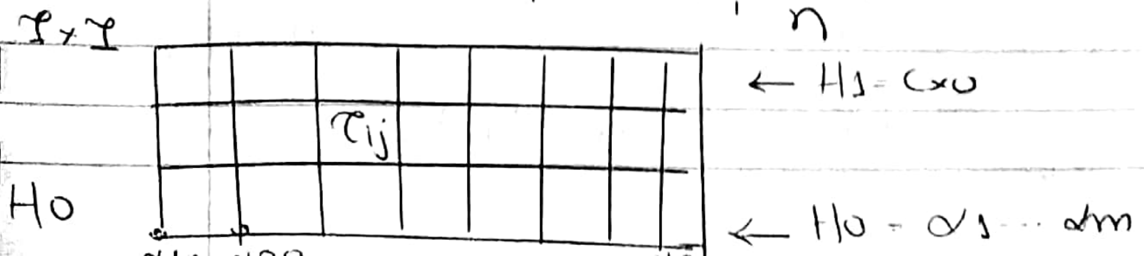
Έστω H η ομοτοπία από το $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ στο x_0.

Από το λήμμα Lebesgue επιλέγουμε n (αρκούντως μεγάλο) και υποδιαιρούμε το $I \times I$ σε "τετραγωνάκια"

$$\tau_{ij} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

Έτσι ώστε $H(\tau_{ij}) \subseteq U$ ή V, $\forall i,j$

Επιλεπτύνοντας περισσότερο την διαμέριση σε τετραγωνάκια (ή επιλέγοντας αρκούντως μεγάλη δύναμη το 2) μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα άκρα των α_i είναι της μορφής $\frac{i}{n}$.

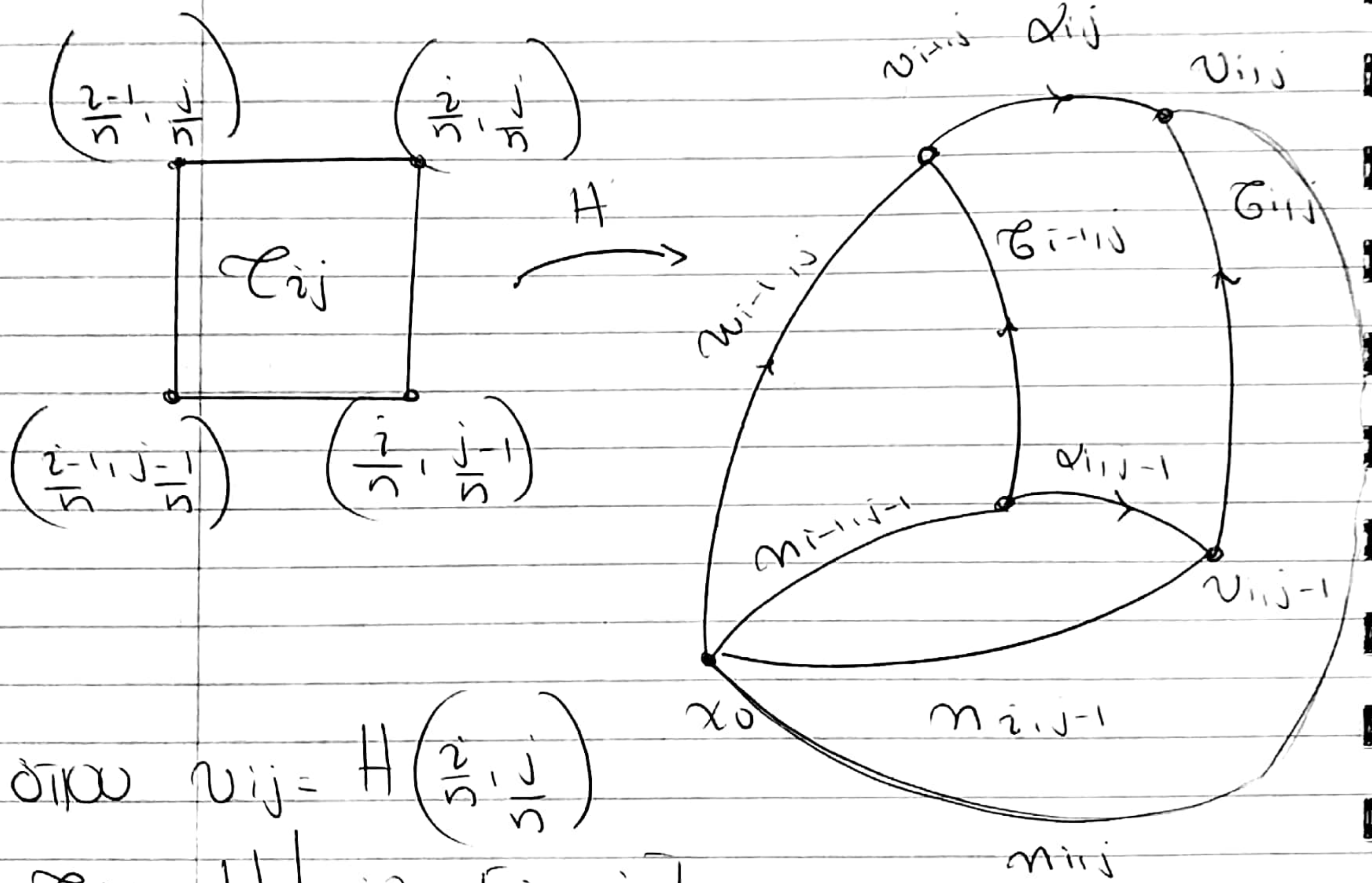


(6)

Συνεπώς

$$H_0 = \alpha_1 \cdots \alpha_m \simeq (\underbrace{\alpha_{10} \cdots \alpha_{\ell 0}}_{\alpha_1}) \cdots (\underbrace{\alpha_{k0} \cdots \alpha_{n0}}_{\alpha_m})$$

Τα α_{ij} δεν είναι απαραίτητως θηλειές.



όπου $v_{ij} = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$

$\tau_{ij} = H\Big|_{\{\frac{i}{n}\} \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]}$

$\alpha_{ij} = H\Big|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \{\frac{j}{n}\}}$.

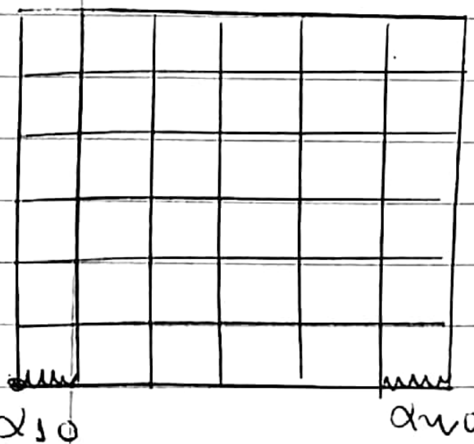
Για κάθε i, j θεωρούμε μονοπάτι w_{ij} από το x_0 στο v_{ij} έτσι ώστε

$Im\, w_{ij} \subseteq U$ ή V ή $U \cap V$

αν $v_{ij} \in U \cap V$ ή U ή V αντίστοιχα.

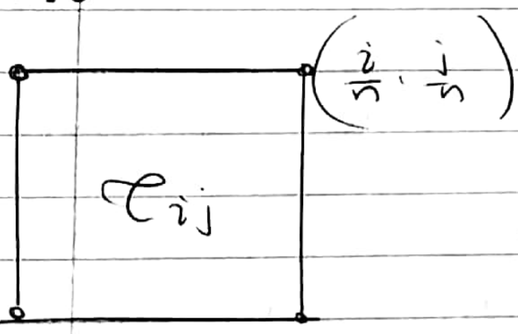
• αν $v_{ij} = x_0$ επιλέγουμε $\eta_{ij} = c_{x_0}$.

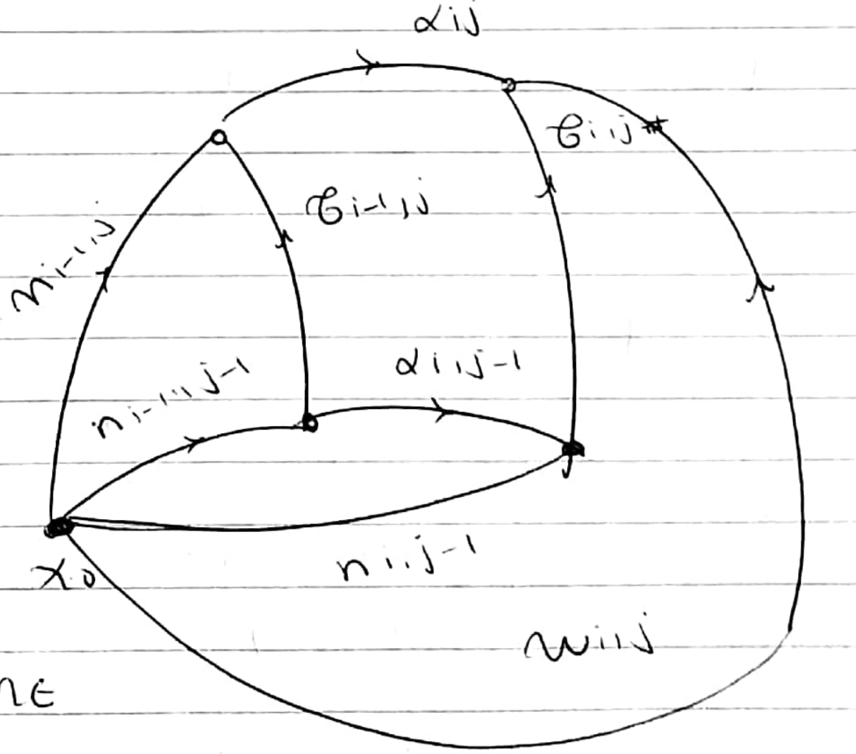
Μάθημα 11ο.



$g = [\alpha_1]_U * \cdots * [\alpha_m]_V \in \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$

με $\varphi(g) = 1 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$





$H(\tau_{ij}) \subseteq U$ ή V

u_{ij} μονοπάτι από το x_0 στο v_{ij} ώστε

$u_{ij} \subseteq U$ ή V ή $U \cap V$. Επιπλέον, αν $v_{ij} = x_0 \Rightarrow \eta_{ij} = c_{x_0}$.

$$\alpha_1 \cdots \alpha_m \underset{X}{\simeq} \underbrace{(\alpha_{10} \cdots \alpha_{p0})}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{(\alpha_{l0} \cdots \alpha_{n0})}_{\alpha_m}$$

(2)

Θεωρούμε τις ποσότητες στοιχ.

$\tilde{\alpha}_{ij} = h_{i-1,j}\, \alpha_{ij}\, h_{i,j}^{-1}$ και

$\tilde{b}_{ij} = h_{i,j-1}\, b_{ij}\, h_{ij}^{-1}$

$\tilde{\alpha}_{ij} \in U$ ή V και $\tilde{b}_{ij} \in U \cap V$

Συνεπώς,

$g = [\alpha_1]_w * \cdots * [\alpha_m]_v =$

$= [\tilde{\alpha}_{10}]_w * [\ ] \cdots * [\tilde{\alpha}_{p0}]_w * \cdots * [\tilde{\alpha}_{m0}]_v$

Υποθέτουμε ότι

$$g \equiv [\tilde{\alpha}_{1,j-1}]_{U\cap V} * \cdots * [\alpha_{n,j-1}]_{U\cap V} \mod N$$

(Ρ)

Από τα "τετραγωνάκια" της ομοτοπίας έπεται ότι

$$\alpha_{i,j-1} \underset{U\cap V}{\simeq} b_{i-1,j} \circ \alpha_{i,j} \circ b_{ij}^{-1}$$

και άρα $\tilde{\alpha}_{i,j-1} \underset{U\cap V}{\simeq} \tilde{b}_{i-1,j} \circ \tilde{\alpha}_{i,j} \circ \tilde{b}_{ij}^{-1}$

Αν έχουμε στην (Ρ) παράγοντα της μορφής $[\alpha_{i,j-1}]_w$ και $H(b_{ij}) \subseteq V$.

(3)

→ $\tilde{\alpha}_{i,j-1}$ σημεία στην τομή (από την επιλογή v_{ij}) και άρα ο παράγοντας μπορεί να αντικατασταθεί mod N από τον $[\tilde{\alpha}_{i,j-1}]$

Απ. $[\tilde{\alpha}_{i,j-1}]_w \equiv [\tilde{\alpha}_{i,j-1}]_{v} \bmod \tilde{N}$

Συνεπώς μετά τις απαραίτητες αντικαταστάσεις από την (1) προκύπτει:

$$g = [\tilde{\tau}_{0j}]_w * [\tilde{\alpha}_{1j}]_w * [\tilde{\tau}_{1j}]^{-1} * \dots * [\tilde{\tau}_{n-1,j}]_{\tilde{v}} * [\tilde{\alpha}_{nj}]_v * [\tilde{\tau}_{nj}]_v \bmod N$$

$$\vdots$$

$$\equiv [\tilde{\tau}_{0n}]_w * [\tilde{\alpha}_{1n}]_w * [\tilde{\alpha}_{2n}]_{u\wedge v} * \dots *$$

$$* [\tilde{\alpha}_{nn}]_v [\tilde{\tau}_{nn}]^{-1}_{\tilde{v}} \bmod N$$

$$\equiv [\tilde{\alpha}_{1n}]_{\tilde{w}} * \dots * [\tilde{\alpha}_{nn}]_v \bmod N$$

γιατί $[\tau_{0j}] = [\tau_{j1}] = [(x_0]$

(η ομοτοπία διατηρεί τα άκρα)

Τελικά,

$$g = [\tilde{\alpha}_{1n}]_{z} * \dots * [\tilde{\alpha}_{nn}]_{z} \equiv [(x_0] * \dots * [(x_0] \bmod N \to g \in N$$

∎

4

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται το εξής γενικότερο (βλ. Hatcher):

<u>Θεώρημα</u>. X τ.χ, $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$

A_α ανοικτά, κ.τ.σ με $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$

Έστω $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ και

$$\Phi : \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

ο ομομορφισμός που επεκτείνει τους ομομορφισμούς:

$$(j_\alpha)_* : \pi_1(A_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

που επάγονται από τις αντίστοιχες ενθέσεις.

(α) Αν για κάθε ζεύγος δεικτών α, β τ.ω $A_\alpha \cap A_\beta$ είναι κ.τ.σ. τότε Φ είναι επί

(β) Αν επιπλέον, κάθε τομή $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ είναι κ.τ.σ. $\to$ $\ker \Phi = N$, όπου N η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$(i_{\alpha\beta})_*(g)\,(i_{\beta\alpha *}(g))^{-1}$$

5

με $\pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$ και $(i_{\alpha\beta})_*$ $(i_{\beta\alpha})_*$ οι επαγ. των ενθέσεων

$i_{\alpha\beta}: A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$

$i_{\beta\alpha}: A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\beta$

Δηλ. $\pi_1(X, x_0) = \dfrac{\ast_\alpha \pi_1(A_\alpha, x_0)}{N}$

<u>Πόρισμα</u>:

Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος αν οι ενθέσεις $U \cap V \hookrightarrow V$, $U \cap V \hookrightarrow U$ επάγουν μονομορφισμούς, τότε

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\pi_1(U, x_0) \ast \pi_1(V, x_0)}{\pi_1(U \cap V, x_0)}$$

Ειδικότερα, αν $U \cap V$ είναι απλά συνεκτικός, τότε

$$\pi_1(U, x_0) \ast \pi_1(V, x_0) = \pi_1(X, x_0)$$

Αν οι επαγόμενοι ομομορφ. δεν ήταν μονομορφ. θα είχαμε ένα "γενικευμένο" ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα για το οποίο δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την γνωστή θεωρία για να

6

να το μελετήσουμε. Στην περίπτωση αυτή θα μελετούσα απευθείας μέσω της "παράστασης"

$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$

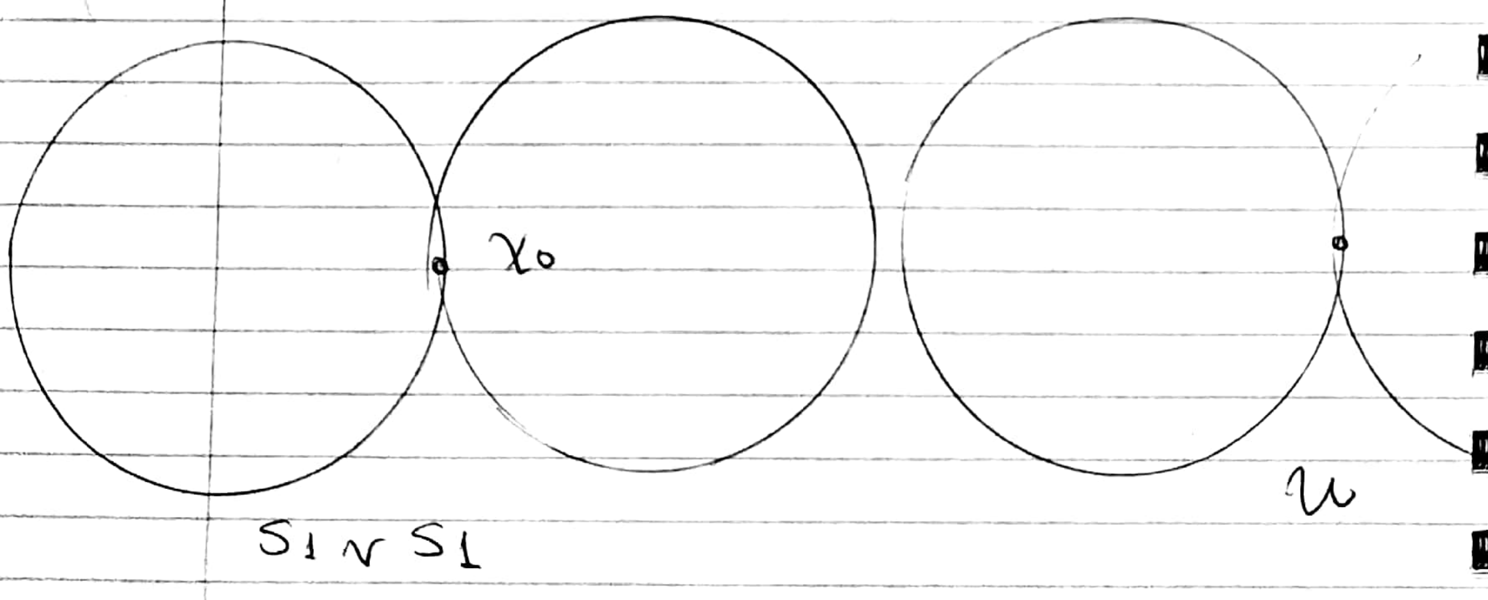
<u>Παράδειγμα:</u> Αν X_i τ.χ., $x_i \in X_i$, τότε η σφήνα

$\bigvee_{i \in I} X_i = \bigsqcup_{i \in I} X_i/\sim$, όπου

$x_i \sim x_j$, $x_0 \in \bigvee_i X_i$, $x_0 = [x_i]_\sim$

το κοινό σημείο αναφοράς.

(1) $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$ ελεύθερη τάξης 2.



①

- $\mathcal{U} \simeq \mathcal{V} \simeq S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathcal{U}) = \pi_1(\mathcal{V}) = \mathbb{Z}$
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ απλά συνεκτικός (μάλιστα συσταλτός)

$X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \Rightarrow$

$$\pi_1(S^1 \vee S^1) = \pi_1(\mathcal{U}) * \pi_1(\mathcal{V})$$

$$= \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2 .$$

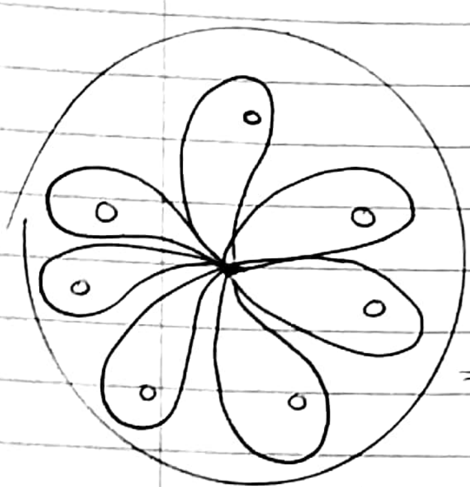
Επαγωγικά, $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) = F_n$ ελεύθερη τάξεως n.

Γενικότερα,

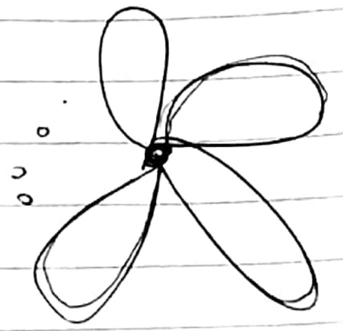
$\pi_1\left(\bigvee_{i \in I} S^1\right) = F_I$, ελεύθερη τάξεως $|I|$

② $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ ή

$D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$

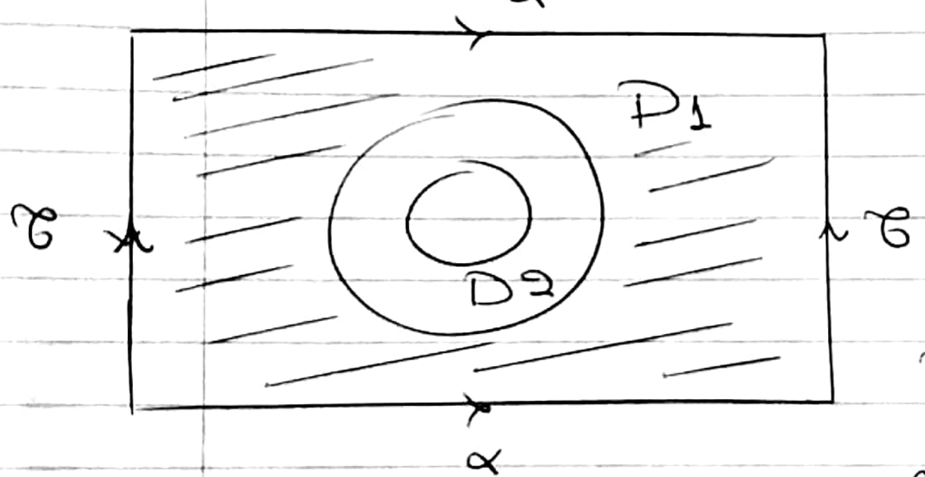


$\simeq S^1 \vee \dots \vee S^1$



$\Rightarrow \pi_1(T) = F_n$

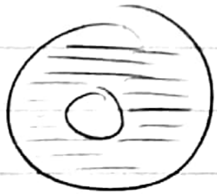
③ $\pi_1(\mathcal{T}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \mathcal{T} = S^1 \times S^1$



Θεωρώ
των ανοικτό
δίσκο όπως
στο σχήμα
ένα μικρότερ
D_2 και έστω

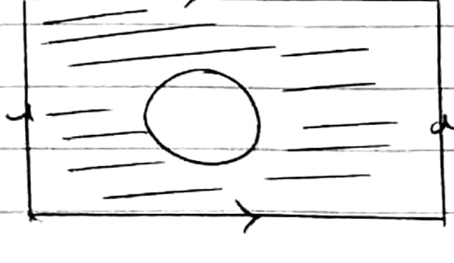
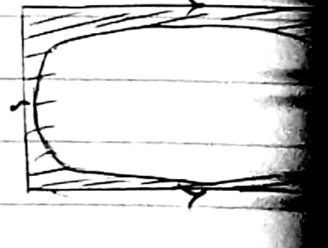
$U = D_1$

$V = \mathcal{T} \setminus D_2$

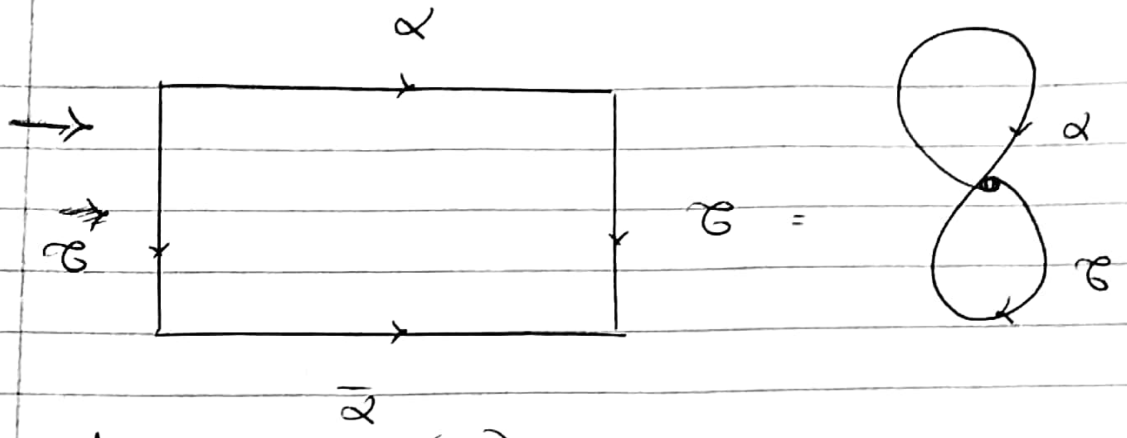
$\pi_1(V) = \{1\}$, $U \cap V =$  $\underset{\text{περιστ}}{\simeq}$

 S^1

$\Rightarrow \pi_1(U \cap V) = \langle \gamma \rangle = \mathbb{Z}$

$V =$  $\xrightarrow{\text{περιστολή}}$ 

9



Άρα, $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2 = \langle \alpha, \beta \rangle$

με $\gamma = 1$ στο W και $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ στο V

Από Seifert-Van Kampen

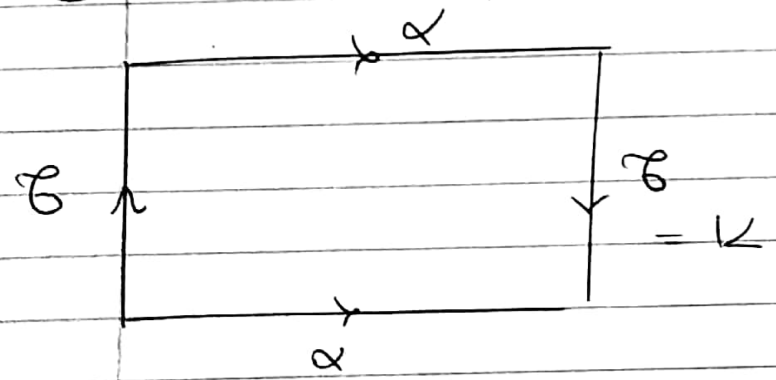
$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1$, στον χώρο T.

Τελικά $\pi_1(T) = \dfrac{1 * \pi_1(V)}{N}$

$= \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle = \langle \alpha \rangle \times \langle \beta \rangle$

$= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

4 Μποτίλια του Klein:



Όπως πριν.

$\pi_1(K) = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta \rangle$

$(\pi_1(K))_{\alpha\beta} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1, \ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

(10)

$\cdot \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

$= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

Αφού $(\pi_1(K))_{\alpha\beta} \neq 1 \to \pi_1(K) \neq 1$

Επιπλέον $\pi_1(K) \not\cong \pi_1(T)$

(έχουν διαφορετικές αβελιανοποιήσεις.)

Ιδιαιτέρως $K \not\cong T$.