(10)

$= \langle \alpha, \beta \mid \beta^2 = 1,\ \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

$= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

Αφού $(\pi_1(K))_{\alpha\beta} \neq 1 \to \pi_1(K) \neq 1$

Επιπλέον $\pi_1(K) \not\cong \pi_1(T)$

(έχουν διαφορετικές αβελιανοποιήσεις.)

Ιδιαιτέρως $K \not\cong T$.

Μάθημα 12ο

<u>Ορσ</u> Μια συνεχής απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ λέγεται <u>ομοτοπική ισοδυναμία</u> αν υπάρχει $\psi : Y \to X$ έτσι ώστε

$\psi \circ \varphi \simeq id_X$ και $\varphi \circ \psi \simeq id_Y$

Στην περίπτωση αυτή οι χώροι λέγονται <u>ομοτοπικά ισοδύναμοι</u> και συμβ. $X \simeq Y$.

- Κάθε περιστολή είναι ομοτοπική ισοδυναμία.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $\varphi : X \to Y$ ομοτοπική ισοδυναμία, τότε ο επα-

γόμενος ομομορφ.

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(I, \varphi(x_0))$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

<u>απόδ</u>: Έστω $\psi: I \to X$ ομοτοπική αντίστροφος της φ. Τότε (έχει δειχθεί) υπάρχουν κατάλληλα μονοπάτια u, γ και μεταθετικά διαγράμματα.

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X, x_0) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\psi_* \circ \varphi_*"] & \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[rr, "\Phi_u"] & ① & \pi_1(X, \psi\circ\varphi(x_0))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(I, \varphi(x_0)) \arrow[dl, "Id"'] \arrow[dr, "\varphi_* \circ \psi_*"] & \\
\pi_1(I, \varphi(x_0)) \arrow[rr, "\Phi_\gamma"] & ② & \pi_1(I, \varphi\circ\psi\circ\varphi(x_0))
\end{tikzcd}$$

όπου Φ_u, Φ_γ ισομορφισμοί αλλαγής σημείου αναφοράς.

Από το ①:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow[1-1]{\varphi_*} \pi_1(I, \varphi(x_0)) \xrightarrow[\text{επί}]{\psi_*} \pi_1(X, \psi\circ\varphi(x_0))$$

(3)

Από το (2):

$$\pi_1(I, \varphi(x_0)) \xrightarrow[1-1]{\psi_*} \pi_1(X, \psi\circ\varphi(x_0))$$

Άρα ψ_* είναι ισομορφισμός και συνεπώς φ_* είναι ισομορφισμός

□

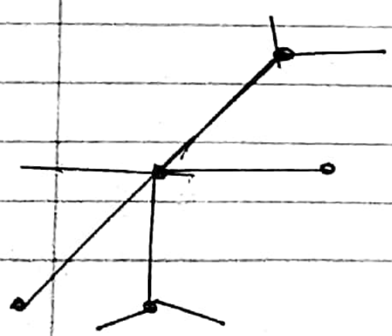
Θεμελιώδης Ομάδα Γραφήματος

Γράφημα = Σύμπλεγμα κελιών διάστασης ≤ 1.

δέντρο: απλά συνεκτικό γράφημα

Κάθε συνεκτικό γράφημα X περιέχει μεγιστικό υπόδεντρο (ως προς τη σχέση περιέχεσθαι) T. το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές του X.

- Κάθε δέντρο είναι συμπτύξιμος χώρος.

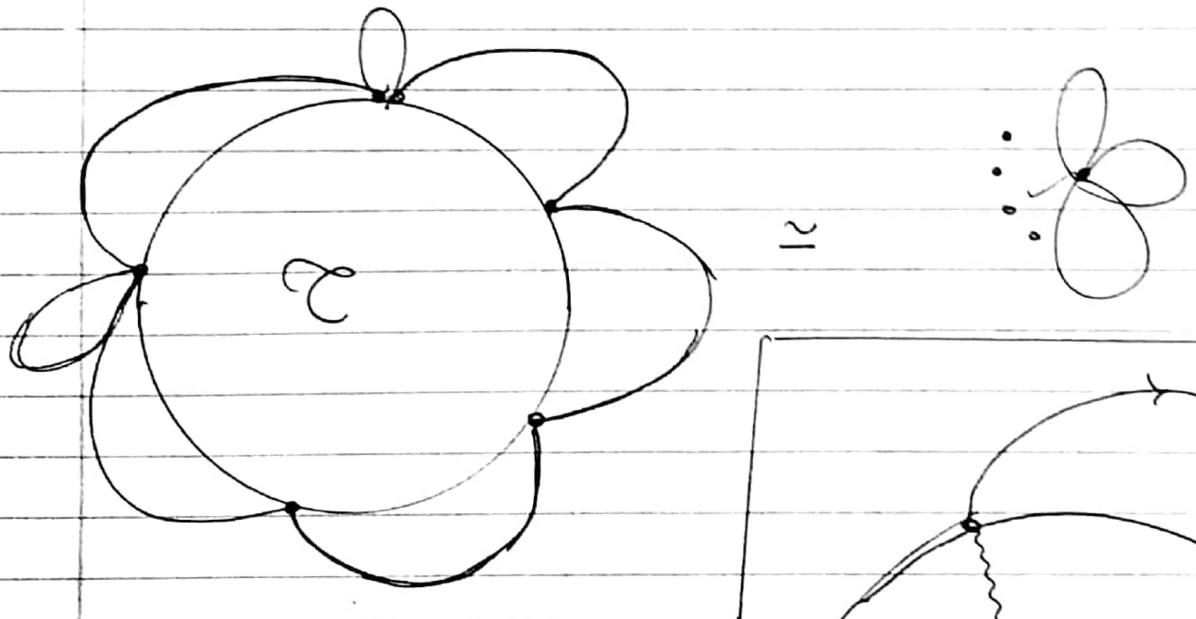


$\simeq \ *$

(4)

<u>Θεώρημα</u>. Έστω X συνεκτικό γράφημα και T μεγιστικό δέντρο του X. Τότε ο χώρος πηλίκο X/T είναι ομοτοπικά ομοιομορφικός με $\bigvee S^1$, δηλ. ένα μπουκέτο I κελιών, ένα κύκλο για κάθε "γεωμετρική" ακμή του T.

Ιδιαιτέρως, $X \simeq X/T$ και $\pi_1(X)$ είναι ελεύθερη τάξεως $|I|$.

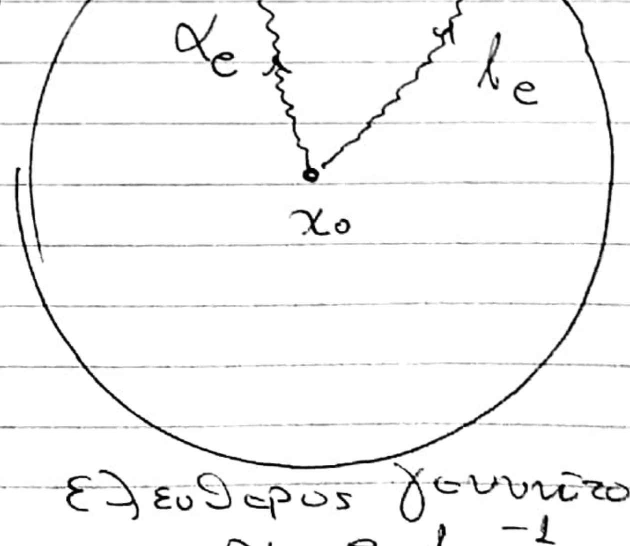


<u>Άσκηση</u> Έστω

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le 1\}$

Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathrm{Int}\, D^n$ υπάρχει $\mathrm{Homeo}(D^n)$ τ.ω.

- $f(x) = x, \ \forall x \in \partial D^n$
- $f(\alpha) = \beta$ (αρκεί $\alpha = 0$)



ελεύθερος γεννήτορας: $\alpha_e \cdot e \cdot b_e^{-1}$

5

<u>Λήμμα</u>: $X = A \cup_{\varphi} D^n$, A τ.χ και $\varphi : S^{n} = \partial D^n \to A$. (Ταυτίζουμε το A με το $\pi(A)$).

Αν $x_0 \in X \setminus A$, τότε $X \setminus \{x_0\}$ περιστέλλεται στον A, δηλ. $A \simeq X \setminus \{x_0\}$

<u>αποδ</u>: $\psi : D^n \to X$ η χαρακτηριστική απεικόνιση

$\Rightarrow$ $\psi|\partial D^n = \varphi$, $\psi|\operatorname{Int} D^n$ ομοιομορφ.

Από την προηγούμενη άσκηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\psi(0) = x_0$.

Ορίζουμε ομοτοπία: $H : X \setminus \{x_0\} \times I \to X \setminus \{x_0\}$ ως εξής:

$$H(x, t) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \psi\left((1-t)\psi^{-1}(x) + t \dfrac{\psi^{-1}(x)}{\|\psi^{-1}(x)\|}\right), & x \in \psi(D^n) \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

. $|\psi^{-1}(x)| \geq 2$;

Αν $x_1, x_2 \in \psi^{-1}(x)$ και $x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow$ $x_1, x_2 \in S^{n-1}$ και $\psi(x_1) = \psi(x_2) = x$

⑥

$$\psi\left((1-t)x_1 + t\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) = \psi(x_1) = x$$

Δηλ. η H είναι καλά ορισ.

Επιπλέον, οι δυο κλάδοι "συμφωνούν" στην $\psi(S^{n-1})$. Από το λήμμα της συγκόλλησης H είναι συνεχής.

- $H(x,0) = \begin{cases} & x \in A, \\ x, & x \in \ldots \end{cases} = id$

- $H(x,1) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \psi\left(\dfrac{\psi^{-1}(x)}{\|\psi^{-1}(x)\|}\right) \in A \end{cases} \Rightarrow H(x,1) \in A$

$\square$

<u>Θεώρημα</u> (Θεμελιώδης Ομάδα πεπερασμένου συμπλέγματος κελιών)

Έστω K ένα συνεκτικό, πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών και έστω $\varphi_i : S^1 \to K^1$ οι απεικονίσεις επισύναψης των 2-κελιών $i = 1, \ldots n$.

Έστω $x_0 \in K^0$ και $cl[\varphi_i]$ η κλάση συζυγίας που ορίζεται από την κλάση της θηλειάς φ_i στην ομάδα $\pi_1(K^1, x_0)$.

Τότε,

$$\pi_1(K, x_0) = \pi_1(K^1, x_0) \Big/ \langle\langle cl[f_1], \dots, cl[f_m] \rangle\rangle .$$

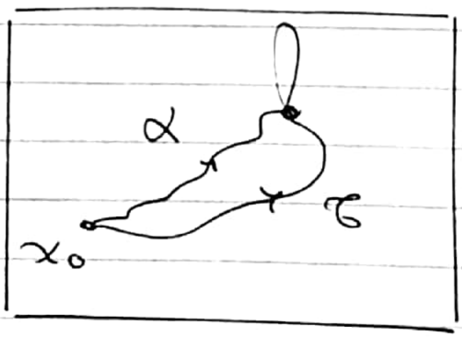
όπου $\langle\langle \dots \rangle\rangle$ η κανονική υποομάδα που παράγεται ....

$\pi_1(K^1, x_0)$ ελεύθερη, άρα έχουμε παράσταση της $\pi_1(K, x_0)$.

$$\left(I \longrightarrow S^1 \xrightarrow{f_i} K^1 \right)$$

• Αν και οι θηλειές δεν ορίζουν απαραίτητως στοιχεία της $\pi_1(K^1, x_0)$ οι αντίστοιχες κλάσεις συζυγίας είναι καλά ορισμένες.

Παράδειγμα:



$$[\alpha][f_i][\alpha^{-1}] = \underbrace{[\alpha][\tau^{-1}]}_{\in \pi_1(K, x_0)} \left([\tau][f_i][\tau^{-1}] \right) \underset{[\alpha^{-1}]}{[\tau]}$$

Άρα $[\alpha][f_i][\alpha^{-1}]$, $[\tau][f_i][\tau^{-1}]$ είναι συζυγή στην $\pi_1(K, x_0)$. Ιδιαιτέρως ορίζουν την ίδια κλάση συζυγίας.

(3)

Απόδειξη

Προκύπτει με επαγωγή από τα ακόλουθα:

X κ.τ.σ. $\varphi: S^{n-1} \to X_1$, $n \geq 2$ και $Y = X \cup_\varphi D^n$. Μπορούμε να θεωρήσουμε $Y \subseteq X$ και $\operatorname{Int} D^n \subseteq Y$

$U = \{ x \in \operatorname{Int} D^n \mid \|x\| < \frac{2}{3} \}$

$V = Y \setminus \{ x \in \operatorname{Int} D^n \mid \|x\| \leq \frac{1}{3} \}$.

- $U, V, U \cap V$ ανοικτά. και $U \cap V \cong S^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \simeq S^{n-1}$.

Από την ομοτοπία του προηγούμενου λήμματος $V \simeq X$.

- Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $n \geq 3 \to \pi_1(U) = \{1\}$ και $\pi_1(U \cap V) = \{1\}$.

άρα από το θεώρημα Seifert-Van-Kampen:

$\pi_1(X) = \pi_1(V) - \pi_1(Y)$.

(β) $n = 2$: $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} = \langle [\gamma] \rangle$ και $[\gamma] = 1$ στο U.

και $[\gamma] = [\varphi]$ (η περιστολή απεικονίζει την γ στην φ)

$\square$

① Μάθημα 13ο

Τελικά ~~■~~ $\pi_1(Y) = \pi_1(X) / \langle\langle cl[\varphi] \rangle\rangle$

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει:

Πόρισμα: Έστω $Y = X \cup_{\varphi} D^n$ και $x_0 \in X$.

① αν $n > 2 \Rightarrow \pi_1(Y) = \pi_1(X)$, δηλ. επισυναψη κελιών διαστασης > 2 δεν αλλάζει την θεμ. ομάδα του χώρου.

② $n = 2$. $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) / \langle\langle cl[\varphi] \rangle\rangle$

Πόρισμα: Για κάθε πεπερ. παρισ-τώμενη ομάδα G, υπάρχει πεπερασμένο σύμπλεγμα κελιών διαστασης ≤ 2 με θεμελιώδη ομάδα G.