Αλγεβρική Τοπ.

Τελικά, $\pi_1(Y) = \pi_1(X) / \langle\langle cl[f] \rangle\rangle$.

Από την προηγ. απόδειξη προκύπτει

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $Y = X \cup_f D^n$ και $x_0 \in X$

① Αν $n > 2$, τότε $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0)$

Δηλ. επισύναψη κελιών διάστασης > 2 δεν αλλάζει την θεμ. ομάδα του χώρου.

② $n = 2$. $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) / \langle\langle cl[f] \rangle\rangle$.

<u>Πόρισμα</u>: Για κάθε πεπερ. παρουσιάσιμη ομάδα G, υπάρχει συμπλέγμα κελιών πεπερ. διάστασης ≤ 2 με θεμελιώδη ομάδα G.

<u>Απόδ.</u>: Αν G είναι ελεύθερη τάξεως n. $\Rightarrow G_n = \pi_1(X)$, όπου X είναι η σφήνα $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$

Αν G <u>δεν</u> είναι ελευθ., θεωρούμε

Παράσταση $G = \langle x_1, \dots, x_n / r_1, \dots, r_k \rangle$.

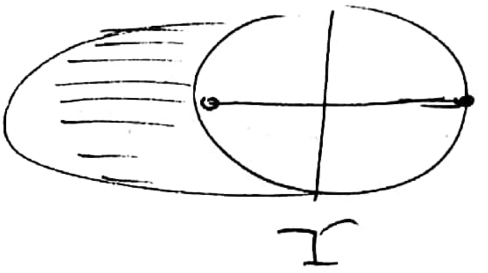
Όπως πριν θεωρούμε τη σφήνα $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$ n το πλήθος ~~κελιών~~ κύκλων και το συμπλεγμα κελιών που προκύπτει ως εξής:

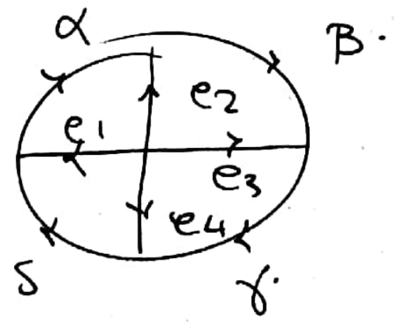
Σε κάθε ~~ελεύθερο~~ γεννήτορα x_i και αντιστοιχίζουμε C_i στη σφήνα. Και για κάθε σχέση r_i, $i=1\dots k$ επισυνάπτουμε κελί δίσκους D κατά μήκος του μονοπατιού. $C_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots C_{i_k}^{\varepsilon_k}$, $r_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_{k_i}}^{\varepsilon_{k_i}}$

Από $f: S^1 \to X$ με $f(\partial D_i) = C_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots E_{i_{k_i}}$

Τότε X πεπερ. συμπλεγμα κελιών με θεμελιώδη ομάδα G. □

- ημισφαίριο με σχοινί





Η θεμ. ομάδα του γραφήματος X' (3)
είναι ελεύθερη με γεννήτορες
τις κλάσεις ομοτοπίας

$\tilde{\alpha} = e_1 \alpha e_2^{-1}$, $\tilde{\beta} = e_2 \beta e_3^{-1}$, $\tilde{\gamma} = e_3 \gamma e_4^{-1}$

και $\delta = e_4 \delta e_1^{-1} \to \pi_1(X', x_0) = F_4$
κέντρο
$= F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$.

Ο προκύπτει από τη επισύναψη 2-κελιού στο X' απ' το ∂D κατά μήκος που υλοποιεί $\alpha\beta\gamma\delta$.
Από τα προηγούμενα, $\pi_1(T) = \pi_1(X)$.
$\langle\langle[\alpha\beta\gamma\delta]\rangle\rangle$.

$(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta} = e_1 \alpha\beta\gamma\delta e_1^{-1} = 1)$.

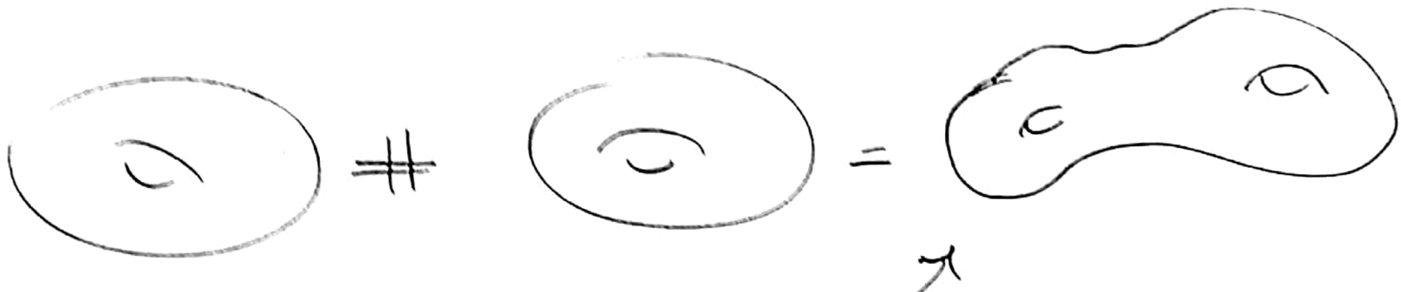
$= F_3 = F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$

Επιφάνειες:

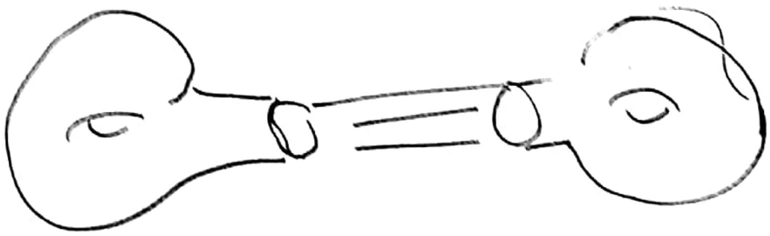
Μια επιφάνεια είναι ένας τοπ. χώρος
Hausdorff, 2ος αριθμ., του ~~οποίο~~ κάθε
σημείο του οποίου έχει ανοιχτή περιοχή
είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^2 \cong \operatorname{Int} D^2$.

Συνεκτικό Άθροισμα.

(αφαιρούμε τα εσωτερικά αντιτύπων μικρών δίσκων στην κάθε μία S_1, S_2 και ταυτοποιούμε τα σύνορά τους).



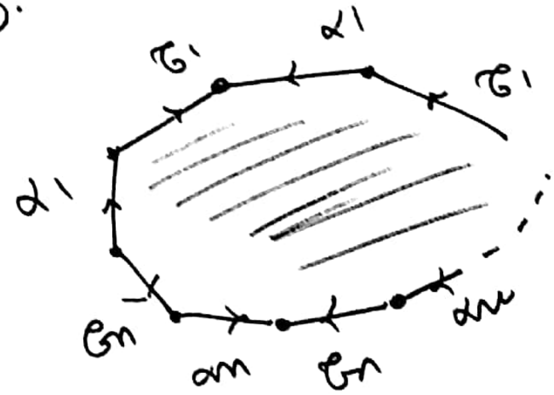
T



Θεωρούμε τους παρακάτω χώρους

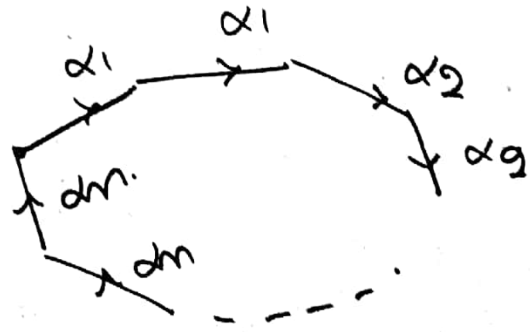
Πηλίκο·

$S_n =$



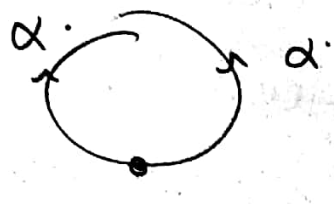
$S_1 = T$.

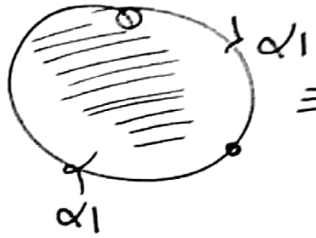
$N_n =$



και σφαίρα

$S^2 =$



$N_1 =$  $\equiv$ προβολικό επίπεδο.

<u>Ισχύουν τα εξής:</u>

$S_n = \underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_{n\text{-φορές}}$, T = σπείρα.

$N_n = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{n\text{-φορές}}$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε συμπαγής επιφάνεια (συνεκτική) S είναι ομοιομορφική με S^2 ή S_n ή N_n για κάποιο $n \geq 1$.

<u>Πρόταση</u>: $\pi_1(S^2) = \{1\}$.

$$\pi_1(S_n) = \langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} = 1 \rangle$$

$$\pi_1(N_n) = \langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1 a_1 \cdots a_n a_n = 1 \rangle.$$

<u>απόδ</u>: Η S_n προκύπτει από την επισύναψη ενός 2-κελιού σ' ένα μπουκέτο $2n$ κύκλων κατά μήκος του μωσαϊκ [illegible] $a_1 b_1 \ldots a_n b_n$.

$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$. Από το πρωτ. προκύπτει η παραπάνω παράσταση.

Ομοίως η N_n προκύπτει από ένα μπουκέτο η το πλήθος κύκλων με ετικέτες $a_1 \dots a_n$ επισυνάπτοντας 2-κελί κατά μήκος του μονοπατιού $a_1 a_1 \dots a_n a_n$.

Άρα $\pi_1(N_n) = \dots$

<u>Πόρισμα</u>: Οι επιφάνειες $S^2, S_n, N_n, n \geq 1$ δεν είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους.

<u>Απόδ</u>: $G_{ab} = G/G'$

$$\pi_1(S_n)_{ab} = \left\langle a_1, \dots, a_n, b_n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_i a_j = a_j a_i \\ b_i b_j = b_j b_i \\ a_i b_j = b_j a_i \end{array} \right\rangle$$

$$= \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{2n} = \mathbb{Z}^{2n}.$$

Άρα $S_n \not\cong S_m$ για $n \neq m$. Επίσης $\pi_1(S_n) \neq \{1\} \Rightarrow S_n \not\cong S^2$.

Αντίστοιχα, $\pi_1(N_n)_{ab} = \left\langle a_1 \dots a_n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1^2 \dots a_n^2 = 1 \\ a_i a_j = a_j a_i \end{array} \right\rangle$

$$= \langle a_1 \dots a_n \mid (\underbrace{a_1 \dots a_n}_{\beta})^2 = 1,\ a_i a_j = a_j a_i \rangle.$$

$= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta \mid \beta^2 = 1, \ \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i, \ \alpha_i \beta = \beta \alpha_i \rangle$. (*)

$= \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2 \ \to N_n \not\cong N_m$, για $n \neq m$.

$\mathbb{Z}^{n-1} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \rangle$, $\mathbb{Z}_2 = \langle \beta \rangle$.

Επίσης, $S_n \not\cong N_n$.

□

<u>Θεώρημα</u>: Κάθε συμπαγής, συνεκτική επιφάνεια S είναι ομοιομορφική με (ακριβώς) μία από τις ακόλουθες

① S^2 ② S_n, $n \geq 1$, ③ N_n, $n \geq 1$.

$S_n =$  $= T \# \dots \# T$.

Από το Seifert - Van Kampen προκύπτει

$U \cap V = \operatorname{Im} \gamma$. $\pi_1(S_n) = F_2 \underset{\mathbb{Z}}{*} F_{2(n-1)}$

$\mathbb{Z} = [\gamma]$.