①

Μάθημα 14 (05/04/2023)

<u>Ορσ</u>: Ένας τχ. X λέγεται **τοπικά κατά τόξα συνεκτικός** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοικτή περιοχή U του x, υπάρχει κ.τ.σ. περιοχή V του x με $V \subseteq U$.

κ.τ.σ. $\Rightarrow$ τ.κ.τ.σ. π.χ. $G \cap [0,1]$.

Κριτήριο ύπαρξης ανυψώσεων

Έστω $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ α.ε. και $\varphi: (I, y_0) \to (X, x_0)$ συνεχής στον I όπου είναι τ.κ.τ.σ και κ.τ.σ. Τότε υπάρχει ανύψωση $\tilde{\varphi}: (I, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ της φ $\Leftrightarrow$

$$\varphi_*(\pi_1(I, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, (\tilde{x}_0))).$$

<u>Απόδειξη</u> $(\Rightarrow)$ αν υπάρχει $\tilde{\varphi}$ τω. $\tilde{\varphi}(y_0) = \tilde{x}_0$ με $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ $\Rightarrow$

$$\varphi_*(\pi_1(I, y_0)) = p_*(\tilde{\varphi}_*(\pi_1(I, y_0)))$$

$$\subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

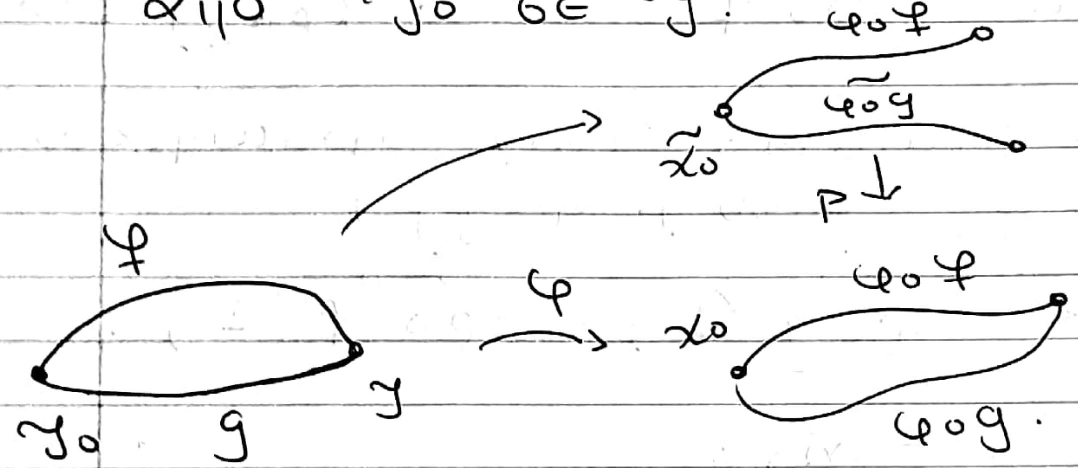
(2)

(⇐) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$\varphi_*\left(\pi_1(Y, y_0)\right) \subseteq p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)$$

<u>Ορισμός της $\tilde{\varphi}$</u>:

Έστω $y \in Y$ και f μονοπάτι από y_0 σε y.



Θεωρούμε την (μοναδική) ανύψωση $\widetilde{\varphi\circ f}$ της $\varphi\circ f$ με αρχή το x_0.

Ορίζουμε $\tilde{\varphi}(y) = \widetilde{\varphi\circ f}(1)$.

- Η $\tilde{\varphi}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του μονοπατιού f.

Αν g μονοπάτι από y_0 ως y, τότε $\varphi\circ(f\cdot g^{-1})$ θηλειά στο x_0. $\overset{\text{υποθ.}}{\Longrightarrow}$

υπάρχει $\tilde{h}$ θηλειά στο $\tilde{x}_0$:

$$p_*[\tilde{h}] = [\varphi\circ(f\cdot g^{-1})]$$

③

$$\Rightarrow p\circ\tilde{w} \simeq \varphi\circ(f\cdot g^{-1}) = \varphi\circ f\cdot(\varphi\circ g)^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi\circ f \simeq (p\circ\tilde{w})\cdot(\varphi\circ g)$$

Αφού $\tilde{w}$ θηλειά στο $\tilde{x}_0$ ορίζεται το γινόμενο $\tilde{w}\cdot\widetilde{\varphi\circ g}$ και $\widetilde{\varphi\circ f} \simeq \tilde{w}\cdot\widetilde{(\varphi\circ g)}$ (ως ανυψώσεις των ομοτοπικών $\varphi\circ f$, $(p\circ w)\cdot(\varphi\circ g)$)

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi\circ g}(1) = \widetilde{\varphi\circ f}(1).$$

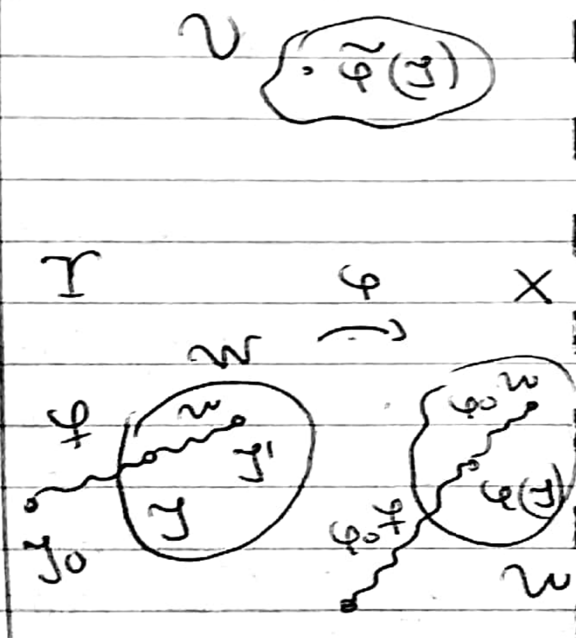
f συνεχής:

Έστω $y\in Y$ και σταθεροποιώ μονοπάτι f y_0 ως y.

Έστω U στοιχειώδης περιοχή του $\varphi(y)$. και V η αντίστοιχη συνιστώσα που περιέχει το $\tilde{\varphi}(y)$.

Εφόσον Y τ.κ.σ.σ. περιέχει κ.τ.σ. περιοχή W του y τ.ω

$$\varphi(W) \subseteq U.$$



Έστω η μονοπάτι $\gamma \sim \gamma'$ εντός της W. $\Rightarrow f \cdot \eta : \gamma_0 \sim \gamma'$

Θεωρούμε ανύψωση $(p|_w)^{-1} \circ (\varphi \circ \eta)$ της $\varphi \circ \eta$, η οποία έχει αρχή $\tilde{\varphi}(\gamma)$ (από την επιλογή της U).

Τότε ορίζεται το γινόμενο

$$\widetilde{\varphi \circ f} \cdot \left[(p|_w)^{-1} \circ (\varphi \circ \eta) \right] = \psi$$

και αποτελεί ανύψωση της $\varphi \circ (f \cdot \eta)$.

Άρα $\tilde{\varphi}(\gamma') = \psi(1) =$

$$= (p|_w)^{-1} \circ (\varphi \circ \eta)(1) = (p|_w)^{-1} \circ (\varphi(\gamma'))$$

Τελικά $\tilde{\varphi}|_W = (p|_w)^{-1} \circ \varphi$, άρα $\tilde{\varphi}$ συνεχής (η συνέχεια είναι τοπική έννοια.)

□

<u>Ύπαρξη Καθολικού Χώρου Επικάλυψης.</u>

<u>Ορσ</u>: Ένας χώρος T λέγεται ημιτοπικά απλά συνεκτικός αν για κάθε $x \in T$ υπάρχει περιοχή U του x τ.ω. ο επαγόμενος

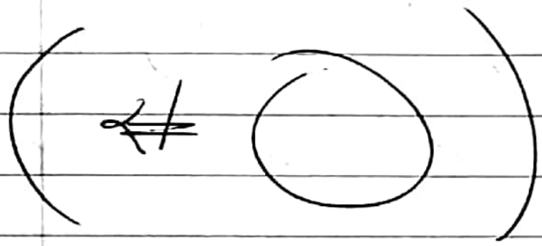
(5)

$$i_*: \pi_1(U, x) \to \pi_1(I, x)$$

της ένθεσης $U \hookrightarrow I$ να είναι τετριμμένος.

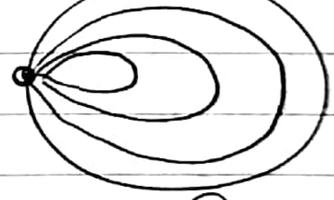
Παραδείγματα

(1) Κάθε απλά συνεκτικός χώρος είναι ημιτοπικά α.σ.



(2) Αν κάθε σημείο $x \in X$ έχει συμπτύξιμη περιοχή, τότε X είναι η.α.σ. Ιδιαιτέρως, κάθε πολλαπλότητα, κάθε σύμπλεγμα κελιών είναι η.α.σ. χώρος.

(3) Ο χώρος



$X = \bigcup_n C_n$, όπου C_n κύκλος ακτίνας $\frac{1}{n}$ με κέντρο $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ στο επίπεδο, δεν είναι η.α.σ.

(6)

<u>Θεώρημα</u> Κάθε (κ.τ.) συνεκτικός, τοπικά κ-τ-σ και ημιτοπικά απλά συνεκτικός χώρος X, επικαλύπτεται από έναν απλά συνεκτικό χώρο $\tilde{X}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x_0 \in X$. Ορίζουμε

$$\tilde{X} = \left\{ [f] \;\middle|\; f \text{ μονοπάτι του } X \text{ με αρχή το } x_0 \right\}$$

και $p : \tilde{X} \to X$, $p([f]) = f(1)$.

Έστω $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}] \in \tilde{X}$

∘ p επί, αφού X κ-τ-σ.

Για κάθε $x \in X$ έστω

$$\mathcal{U}_x = \left\{ U \text{ κ-τ-σ ανοιχτό}, x \in U \text{ τ.ω. } i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x) \text{ τετρ.} \right\}$$

με $i : U \hookrightarrow X$

Εφόσον X τοπικά κ-τ-σ, ημιτοπικά α.σ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_x$ βάση περιοχών του x.

(φ)

Άρα από τον ορσ της τοπικ
μπορώ να θεωρώ τις περιο-
χές κ.τ.σ. και όσο "μικρές"
θέλω.

<u>Τοπολογία στο $\tilde{X}$:</u>

Για μονοπάτι φ με αρχή
x_0 θεωρώ $U \in \mathcal{U}_{\varphi(1)}$ και
το σύνολο

$[\varphi U] = \{ [\varphi \cdot \alpha] \mid$ α μονοπάτι με αρχή
το $\varphi(1)$ εντός της
$U \}$.

$[\varphi U] \sim$

Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{ [\varphi . U] \mid \varphi, U$ όπως
πριν $\}$

Θδο. $\mathcal{B}$ αποτελεί βάση για μια
τοπολογία στον $\tilde{X}$ με την οποία και
το εφοδιάζουμε.

- <u>Καλύπτει το σύνολο $\tilde{X}$.</u>

8

αν $[\varphi] \in \widetilde{X} \Rightarrow [\varphi] \in [\varphi\mathcal{U}]$

$\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\varphi(1)}$.

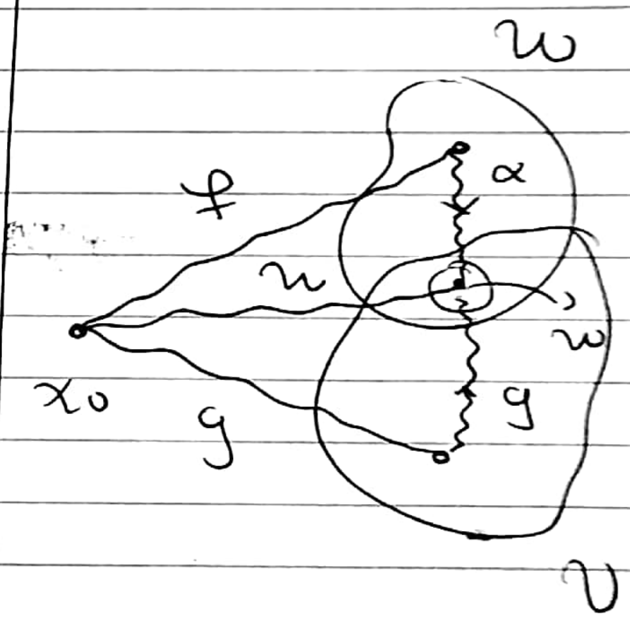
- αν $[\varphi\mathcal{U}], [g\mathcal{V}] \in \mathcal{B}$ με

$[\varphi\mathcal{U}] \cap [g\mathcal{V}] \neq \emptyset$, τότε υπάρχει μονοπάτι h με αρχή το x_0 τ.ω.

$h \simeq \varphi\alpha,\ \alpha \in \mathcal{U}$

$h \simeq g\sigma,\ \sigma \in \mathcal{V}$

Εφόσον $\mathcal{U}_{h(1)}$ βάση περιοχών του $h(1)$, υπάρχει $\mathcal{W} \in \mathcal{U}_{h(1)}$ τ.ω $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$



Παρατηρούμε ότι $[h\mathcal{W}] \subseteq [\varphi\mathcal{U}] \cap [g\mathcal{V}]$.