(1)

Αλγεβρική Τοπολογία

<u>Θεωρ:</u> Κάθε κ.τ.σ. και τ.κ.σ.σ. και ημιτοπικά απλά συν. X επικαλύπτεται από ένα απλά συνεκτικό $\tilde{X}$.

Συνέχεια απόδειξης.

<u>$\tilde{X}$ κ.τ.σ.</u>: Αρκεί ότι κάθε $[\varphi] \in \tilde{X}$ "συνδέεται" με το $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$.

Θεωρούμε $\tilde{\varphi}(t) = [\varphi_t]$, όπου

φ_t το τμήμα της φ από $0 \rightsquigarrow t$

δηλ. $\varphi_t(s) = \varphi(ts)$.

$\tilde{\varphi}(0) = \tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ <u>και</u> $\tilde{\varphi}(1) = [\varphi]$.

Από τους ορισμούς προκύπτει ότι $\tilde{\varphi}$ είναι συνεχής (γιατί;)

• Η $p: \tilde{X} \to X$ είναι α.ε.

Έστω $x \in X$. Σταθ. $U \in \mathcal{U}_x$

Θ.δ.ο. U στοιχειώδης περ. x με αντίστοιχες συνιστώσες τα $[\varphi u]$

κάθε φ διατρέχει τις κλ. ομοτοπίας μονοπατιών από $x_0 \rightsquigarrow x$.

②

(α) $p^{-1}(\mathcal{U}) = \coprod_{[f]} [f\mathcal{U}]$.

$p([f\mathcal{U}]) \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow [f\mathcal{U}] \subseteq p^{-1}(\mathcal{U})$

$\Rightarrow \bigcup [f\mathcal{U}] \subseteq p^{-1}(\mathcal{U})$

Έστω $[g] \in p^{-1}(\mathcal{U}) \Rightarrow g(1) \in \mathcal{U}$

Αν α μονοπάτι $g(1) \rightsquigarrow x$, $\alpha \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow [g] = [\underbrace{g\alpha}_{f}\alpha^{-1}]$

και έτσι $p^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \bigcup_{[f]} [f\mathcal{U}]$.

∘ Η ένωση είναι ξένη. Έστω

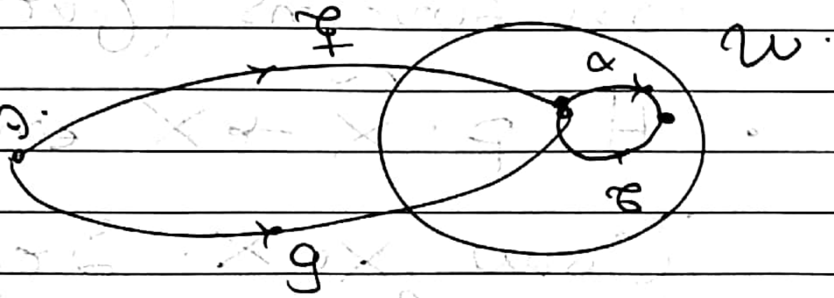
$[h] \in [f\mathcal{U}] \cap [g\mathcal{U}] \neq \phi$.

$\Rightarrow h \simeq f\alpha$, $\alpha, \beta \subseteq \mathcal{U}$ όπως στο

$\quad " \simeq g\sigma$. σχήμα.

Τότε $\alpha(1) = \sigma(1)$

και από την επιλ.



$\mathcal{U}$ έχουμε ότι

$\alpha \simeq \sigma$ και επομένως $f\alpha \simeq g\sigma \Rightarrow$

$f \simeq g \Rightarrow [g\mathcal{U}] = [f\mathcal{U}]$.

(3) .

(β) • p συνεχής $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{[\varphi]} [\varphi\mathcal{U}]$.

(αντιστρέφει τα της βάσης περιοχών σε ανοικτά.)

(γ) $p| : [\varphi\mathcal{U}] \to [\mathcal{U}]$ ομοιομορφισμός

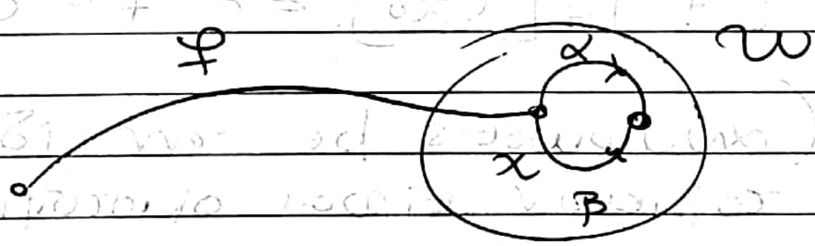
• $p|$ συνεχής ως περιορισμός συνεχούς

• $p|$ επί, γιατί $\mathcal{U}$ κ.τ.σ.

• $p|$ 1-1. Αν $p([\varphi\alpha]) = p([\varphi\beta])$

$\alpha, \beta \subseteq \mathcal{U}$ με αρχή x_1, $\alpha(1) = \beta(1)$

Από την επιλογή των $\mathcal{U}$.
$\alpha \simeq \beta \Rightarrow [\varphi\alpha] = [\varphi\beta]$.



• $p|$ είναι ανοικτή ως περιορισμός ανοικτής σε ανοικτό.

(p ανοικτή γιατί απεικονίζει βασικά σε ανοικτά)

Τελικά, $p|$ ομοιομορφισμός.

(δ) $\tilde{X}$ απλά συνεκτικός.

Έστω F θηλειά στο $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}]$ και $f = p \circ F$, ανύψωση θηλειάς στο x_0. Αν $\tilde{f}$ είναι το μονοπάτι $\tilde{f}(s) = [f_s]$ που ορσ. για ν.δ.ο. $\tilde{X}$ είναι κ.τ.σ., τότε $\tilde{f}$ ανύψωση του f με αρχή το $\tilde{x}_0$.

$p \circ \tilde{f}(t) = p\left([f_t]\right) = f_t(1) = f(t)$.

Άρα $F = \tilde{f}$ ως ανυψώσεις με την ίδια αρχή, του f.

Ιδιαιτέρως, $\tilde{f}$ θηλειά. Δηλ.

$[f] = [c_{x_0}] \Rightarrow f \simeq c_{x_0} \Rightarrow F \simeq c_{\tilde{x}_0}$

(ανυψώσεις με την ίδια αρχή ομοτοπικών είναι ομοτοπικές)

□

Πρόταση: Έστω X (κ.τ.) συνεκτικός, τ.κ.τ.σ., τοπικά απλά συνεκτικός. Για κάθε υποομάδα $H \leq \pi_1(X, x_0)$ υπάρχει επικάλυψη

$p_H : \tilde{X}_H \to X$

με $p_{H*}\left(\pi_1\left(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0\right)\right) = H$

όπου $\tilde{x}_0$ κατάλληλο σημείο του $\tilde{X}_H$.

<u>απόδειξη</u>: Χρησιμοποιούμε τον συμβ. της αποδ. του προηγ. θεωρ.
Στον απλά συν. χώρο επικάλ. $\tilde{X}$ ορίζουμε σχέση ισοδ. ως εξής:

$[f] \sim [g] \iff f, g$ ίδια άκρα και $[fg^{-1}] \in H$.

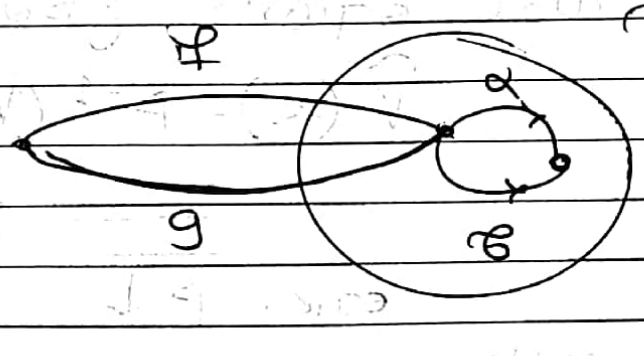
<u>Συμβ.</u> με $\tilde{X}_H$ τον αντίστ. χώρο πηλίκο. $[[f]]_H \leftarrow$ κλάση ισοδ.

$p_H : \tilde{X}_H \to X$, $p_H\left([[f]]_H\right) = f(1)$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[dr, "q"] \arrow[d, "p"'] & \\ X & \tilde{X}_H \arrow[l, "p_H"] \end{tikzcd}$$

Αν δύο συνοικίες $[fU]$, $[gU]$ της σ.π. U περιέχουν ισοδύναμα στοιχεία, τότε

$[f\alpha(g\sigma)^{-1}] \in H$



όπου $\alpha, \sigma \subseteq U$ με αρχή $f(1) = g(1)$.

$\to \forall w \in U : [\varphi w (g w)^{-1}]$

$= [\varphi \cdot g^{-1}] = [\varphi \alpha \cdot \sigma^{-1} g^{-1}] \in H$

Συνεπώς, συνιστώσες όπως πριν που περιέχουν ισοδύναμα στοιχεία ταυτοποιούνται στο $\tilde{X}_H$ και όπως στην προηγ. αποδ. προκύπτει ότι ο $\tilde{X}_H$ επικαλύπτει τον X μέσω της p_H.

Έστω $\tilde{x}_0 \left(= \tilde{x}_0^H\right) = \pi\left([c_{x_0}]\right)$.
και $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$.

Έστω $\tilde{\varphi}$ ανύψωση στον $\tilde{X}$ της φ με αρχή $[c_{x_0}]$. Τότε $\pi(\tilde{\varphi})$ ανύψωση στον $\tilde{X}_H$ της φ με αρχή το $\tilde{x}_0$.

$[\varphi] \in \mathrm{Im}(p_H)_* \iff \pi(\tilde{\varphi})$ θηλειά

$\iff [\varphi] \sim [c_{x_0}] \iff [\varphi] \in H$.

□

- Κάθε χώρος επικάλυψης γραφήματος (γενικότερα συμπλ. κελιών) είναι επίσης γράφημα.

$\tilde{V}(X) = p^{-1}(V(X))$

$$\tilde{X} \xrightarrow{p} X$$

X γράφημα.

$p^{-1}(A)$

επικ. $p \downarrow$

A