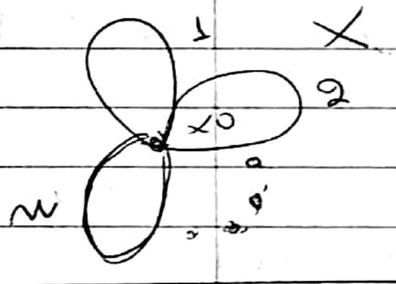
(1)

<u>Μάθημα 16</u> (26/04/2023)

• Κάθε υποομάδα ελεύθερης είναι ελεύθερη.

<u>απόδειξη:</u> Έστω $H \leq F$ με F ελεύθερη. Έστω (*) $n = \mathrm{rank}(F)$ και X μια σφήνα με n κύκλους, ένας για κάθε ελεύθερο γεννήτορα.

$$\Rightarrow \pi_1(X) = \pi_1(X, x_0) \cong F$$



Από προηγ. θεωρ. υπάρχει επικάλυψη

$$p_H : \tilde{X}_H \to X \text{ με}$$

$$p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0\right)\right) = H$$

Επίσης, p_* μονομορφισμός $\Rightarrow$

$$\pi_1\left(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0\right) \cong H$$

Ο χώρος $\tilde{X}_H$ είναι (συνεκτ.) γράφημα, άρα η $\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0)$ είναι ελεύθερη. Συνεπώς, η H είναι ελεύθερη. □

((*) Ομοίως, αν F δεν είναι πεπερ. παραγ.)

②

Αν επιπλέον $[F : H] = m$ και τότε κάθε νήμα έχει m το πλήθος στοιχεία.

Όμως, $rank(H) = \#$ ακμών (γεωμετρικών) εκτός μεγιστικού υποδέντρου

$$= |E^+(\widetilde{X}_H)| - |E^+(\mathcal{T})|,$$ όπου

$\mathcal{T}$ μεγιστικό υπόδεντρο.

Άρα κάθε νήμα έχει m στοιχεία, $v(\mathcal{T}) = m$. και

$$|E^+(\widetilde{X}_H)| = m \cdot n.$$

Τελικά

$$rank(H) = mn - (m-1) = m(n-1) + 1$$

$$\Rightarrow rank(H) - 1 = m(rank(F) - 1).$$

<u>Ταξινόμηση χώρων Επικάλυψης</u>

<u>Ορσ.</u> Έστω $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$

επικαλύψεις ενός χώρου X. Ένας <u>ομοιομορφισμός</u> (επικαλύψεων) είναι μια συνεχής $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$

③

έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & G & \\ {\scriptstyle p_1} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle p_2} \\ & X & \end{array}$$

$p_1 = p_2 \circ \varphi$

Η φ λέγεται **ισομορφισμός** αν επιπλέον είναι ομοιομορφισμός.

Συμβ: $\varphi: (A, \alpha) \to (B, \sigma)$ σημαίνει $\varphi(\alpha) = \sigma$.

Πρόταση: Έστω:

$p_1: (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$, $p_2: (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$

δύο επικαλύψεις όπου $X, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ είναι κ.τ.σ, τ.κ.τ.σ. Τότε

υπάρχει ισομορφισμός επικ. $\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ με $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ ανν

$$(p_1)_*\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right) = (p_2)_*\left(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\right)$$

απόδειξη: $(\Rightarrow)$ αν υπάρχει ισομ.

$\varphi: \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ τότε

(4)

$$\varphi_* : \pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to \pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$$

ισομορφισμός ομάδων.

$$\boxed{\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ & X \end{tikzcd}}$$

$$p_{2*} \circ \varphi_*\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right) = (p_1)_*\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right)$$

$$\Leftrightarrow (p_2)_*\left(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)\right) = (p_1)_*\left(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)\right).$$

$(\Leftarrow)$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X}_1 \arrow[d, "p_1"] \\ \tilde{X}_2 \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}_2"] \arrow[r, "p_2"'] & X \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\ \tilde{X}_1 \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"'] & X \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

Από υποθ. και κριτήριο ανυψώσεων μονοπατιών, υπάρχουν $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ ώστε τα προηγ. διαγράμματα να είναι μεταθετικά.

$$p_1 \circ (\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1) = p_2 \circ \tilde{p}_1 = p_1$$

$\xrightarrow{\text{μοναδικότητα}}$ $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = id_{\tilde{X}_1}$

ανυψ.

Ομοίως, $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = id_{\tilde{X}_2} \rightarrow$

$\tilde{p}_1$ είναι ισομορφισμός $\square$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $p: \tilde{X} \to X$
επικάλ. $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$
Υποθ. $\tilde{X}, X$ τ.κ.σ.σ., κ.τ.σ.

Έστω $\tilde{\gamma}$ μονοπάτι του $\tilde{X}$ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$.

(α) Αν $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, τότε

$$\underbrace{[\gamma]\, p_*\left[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\right] [\gamma]^{-1}}_{H_1} = \underbrace{p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)}_{H_0}$$

Δηλ. οι υποομάδες H_1, H_0 της $\pi_1(X, x_0)$ είναι συζυγείς

(β) Κάθε υποομάδα H της $\pi_1(X, x_0)$ που είναι συζυγής με την $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]$ είναι της μορφής

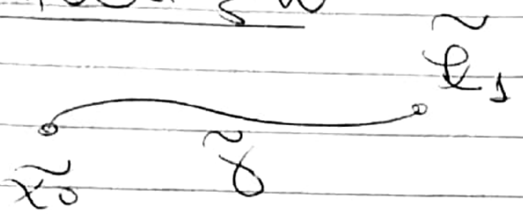
$$p_*\left[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\right], \quad \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0).$$

Δηλαδή καθώς το $\tilde{x}$ διατρέχει το νήμα $p^{-1}(x)$, οι υποομάδες $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ της $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ αποτελούν μια κλάση συζυγίας.

(6)

απόδειξη

(α)



Έστω $\Phi_{\tilde{\gamma}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

ο ισομορφισμός αλλαγής σημείου αναφοράς, $[\varphi] \mapsto [\tilde{\gamma}\varphi\tilde{\gamma}^{-1}]$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[r, "\Phi_{\tilde{\gamma}}"] \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\Phi_\gamma"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

$$p_*[\pi_1(X, \tilde{x}_0)] = p_*(\mathrm{Im}\,\Phi_{\tilde{\gamma}})$$

$$= p_* \circ \Phi_{\tilde{\gamma}} [\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)]$$

$$= [\gamma]\, p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))\, [\gamma^{-1}]$$

(β) Έχουμε ότι

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = [\alpha] H [\alpha^{-1}]$$

όπου $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

7

Θεωρούμε $\tilde{\alpha}$ ανύψωση της α με αρχή το $\tilde{x}_0$ και $\tilde{x} = \tilde{\alpha}(1)$

$\to \tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ (αφού α θηλειά)

$$P_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = [\alpha] P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})][\alpha]^{-1}$$

$$\to H = P_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$$

Θεώρημα Έστω

$P_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$

$P_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$

δύο επικαλύψεις του X με $\tilde{X}, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ κ.τ.σ, τ.κ.τ.σ.

Οι παραπάνω επικαλύψεις είναι ισόμορφες ανν

$$P_{1*}[\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)], (P_2)_*[\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)]$$

είναι συζυγείς

Απόδειξη: Αν οι επικαλύψεις είναι ισόμορφες, έστω $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ ισομορφισμός

⑧

$(p_1)_*\left[\pi_1\left(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1\right)\right] = (p_2)_*\left[\pi_1\left(\tilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1)\right)\right]$

Όμως, $p_*\left[\pi_1\left(\tilde{X}_2, \varphi(\tilde{x}_1)\right)\right]$, $p_*\left[\pi_1\left(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2\right)\right]$ είναι συζυγείς αφού $\tilde{x}_2, \varphi(\tilde{x}_1)$ ανήκουν στο ίδιο p_2-νήμα.

Αντίστροφα, αν είναι συζυγείς τότε αλλάζοντας στοιχείο στο νήμα θα έχω ισότητα και η ύπαρξη του ισομορφισμού έπεται από την πρώτη πρόταση.

Από τα προηγούμενα έπεται το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω X κ.τ.σ., τ.κ.τ.σ. και τοπικά ~~κ.τ.σ.~~ απλά συνεκτικός, $x_0 \in X$. Τότε υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση ψ μεταξύ των κλάσεων ισομορφίας των κ.τ.σ. επικαλύψεων $p: \tilde{X} \to X$ και των κλάσεων συζυγίας της $\pi_1(X, x_0)$ η οποία ορίζεται αντιστοιχίζοντας την κλάση ισομορφίας

$\{p: \tilde{X} \to X\}$ της επικαλ. στην κλάση συζυγίας $Cl\, p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)$
$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$

9

- <u>Για το επί</u>: Αφού X είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός (δηλ. $\forall H \leq \pi_1(X, x_0)$ υπάρχει $\widetilde{X}_H$ ...)