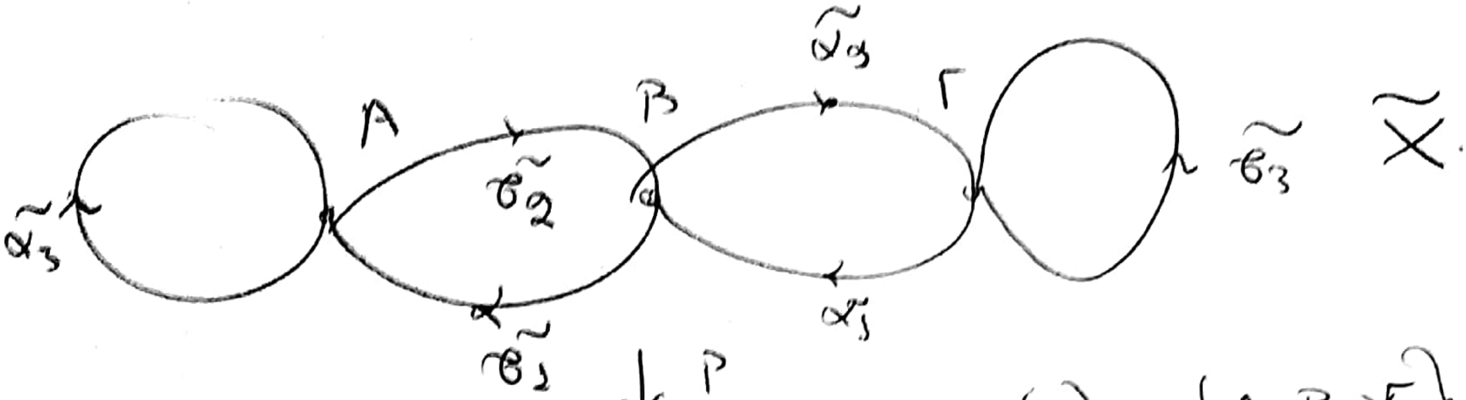
Μάθημα 10.

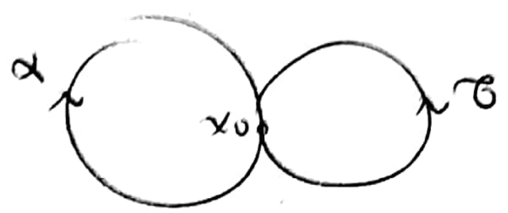


$\downarrow p$

$p^{-1}(x_0) = \{A, B, \Gamma\}$

$\tilde{\sigma}_i \longmapsto \sigma$ ("γραμμ")

$\tilde{\alpha}_i \longmapsto \alpha$

$X =$ 

$B = \tilde{x}_0$, $T = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\sigma}_1\}$ μεγιστικό δέντρο

Το σύνολο (των κλάσεων ομοτοπίας) των $\{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2, \tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_1^{-1}\tilde{\sigma}_3\tilde{\alpha}_1, \alpha_3\tilde{\sigma}_1^{-1}\} = \Sigma$ είναι ένα σύνολο γενν. της $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

Έστω $H = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

Αν η επικάλ. ήταν κανονική $\Longrightarrow$

$H \cong \pi_1(\tilde{X}, x_0)$ = ελεύθερη επί $\{\alpha, \sigma\}$ (κλ. ομοτ.)

$p_*(\Sigma) = \{\alpha^2, \sigma^2, \alpha^{-1}\sigma\alpha, \sigma\alpha\sigma^{-1}\}$.

ελεύθερο σύνολο γενν. της H

$\left(H \underset{p_*}{\cong} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)$ Αφού $H \trianglelefteq \pi_1(X, x_0)$ (2)

$\Rightarrow$ σειρά $H \to \pi_1(X, x_0) - H$

Έστω $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ μια επικ., $\tilde{X}$ συνεκ.

και $G(\tilde{X})$ η ομάδα μετασχ/μών.

Η δράση της $G(\tilde{X})$ στο $\tilde{X}$ ικανοποιεί

την παρακάτω ιδιότητα:

Για κάθε $\tilde{x} \in \tilde{X}$ υπάρχει "ανοικτή"

περιοχή U του $\tilde{x}$ ώστε για κάθε

ζεύγος $g_1, g_2 \in G(\tilde{X})$ με $g_1(U) \cap g_2(U) \neq \emptyset$

$\Rightarrow g_1 = g_2$ (*)

Πράγματι αν έχω $g_1 v_1 = g_2 v_2$.

$\Rightarrow p(v_1) = p(v_2)$ Άρα v_1, v_2 στο ίδιο

νήμα. Συνεπώς, αν επιλέξουμε

V την συνιστώσα που περιέχει το $\tilde{x}$:

θα έχουμε ότι $v_1 = v_2$ $\Rightarrow$

$g_1 v_1 = g_2 v_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

…ια τέτοια δράση που ικανοποιεί (3)

την ⊛ λέγεται δράση χώρου επικάλυψης.

Είναι άμεσο ότι ⊛ αν $U \cap gU \neq \emptyset \Rightarrow g = 1$

• Αν $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ κανονική τότε

$G(\tilde{X})$ δρα μεταβατικά στα νήματα

$\Rightarrow p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ αν $\tilde{x} = \varphi(\tilde{y})$ για

κάποιο $\varphi \in G(\tilde{X})$.

Έτσι $X \cong \tilde{X} / G(\tilde{X})$.

Όπως θα δούμε κάθε με αυτό

τον τρόπο προκύπτουν κανονικοί χώροι

επικάλυψης.

<u>Πρόταση</u>: Υποθέτουμε ότι μια

ομάδα G στο $\underline{Y}$ (π.χ.) μέσω ομοιομορφ.

έτσι ώστε να ικανοποιείται η ⊛.

Τότε:

(1) η απεικ. πηλίκο $p: Y \to Y/G$

με $p(y) = [y]$ τροχιά του y.

ορίζει κανονικό χώρο επικάλυψης

του Y/G

(2) Αν Y (κ.τ.) συνεκτικός $\Rightarrow$

G είναι η ομάδα μετασχηματισμών

της επικάλυψης. $Y \xrightarrow{p} Y/G$.

(3) $G \cong \pi_1(Y/G, ?) / p_* \pi_1(Y, y)$

αν $\exists$ I κ.τ.σ. και τ.κ.τ.σ.

<u>απόδειξη</u> (1) Η $p: Y \to Y/G$

είναι επί (και συνεχής) είναι επίσης

ανοικτή. αν $U \subseteq$ ανοικτό $Y \to$

$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_g gU$ = ανοικτό ως ένωση ανοικτών.

$\overset{p}{\Rightarrow}$ $p(U)$ ανοικτό

απ πηλ.

• p προβ. επικάλ.: Έστω $y \in Y$ και ⑤

$\mathcal{U}$ (αν.) περιοχή του y για την οποία ικανοποιείται η (*). $\Rightarrow$ λ.ο. $p(\mathcal{U})$ στοιχ. περ. του $p(y)$. $\mathcal{U}$ προκύ-

Από την επιλογή της $\mathcal{U}$ έπεται ότι $p^{-1}(p(\mathcal{U})) = \coprod_{g \in G} g\mathcal{U}$.

$p = p| : g\mathcal{U} \to p(\mathcal{U})$ ομοιομορφισμός.

Συνεχής, ως περ. συνεχούς, ανοικτή ως περ. ανοικτής σε ανοικτό.

• επί ✓. $p(gv_1) = p(gv_2)$, $v_1, v_2 \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow g\underbrace{v_1}_{\in \mathcal{U}} = g_1 \cdot g\underbrace{v_2}_{\in \mathcal{U}}$, $g_1 \in G$ $\xRightarrow{(*)} g = g_1 g$

$\Rightarrow gv_1 = gv_2$.

• $Y \to Y/G$ κανονική: Είναι άμεσο ότι $G \subseteq G(Y)$. (αφού $p \circ g = p$). και ότι η G δρα μεταβατικά σε κάθε νήμα (g_1, g_2 στο ίδιο νήμα
την g_1, g_2 στη ίδια τροχιά)

Έπεται ότι $G(Y)$ δρά μεταβατικά (6) στο νήμα και άρα έχουμε και επικ.

(2) $G \subseteq G(Y)$. Έστω $\varphi \in G(Y)$ και $y \in Y$. Αφού φ μετασχηματισμός, άρα στη $\varphi(y), y$ στο ίδιο νήμα, άρα στην ίδια τροχιά.

Άρα $\varphi(y) = g \cdot y$, για $g \in G$.
Αφού Y συνεκτικός, $\varphi = g$, έτσι $G = G(Y)$.

(3) Από την προηγ. πρόταση $\square$.

Ομολογία:

X εx. $\rightsquigarrow$ $\{H_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ αβ. ομ.

$X \xrightarrow{\varphi} Y \rightsquigarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(\varphi)} H_n(Y)$.

(7)

$E_0 = O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

$E_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$

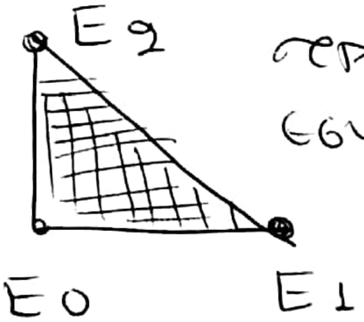
$\vdots$

$E_i = (0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-θέση}}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

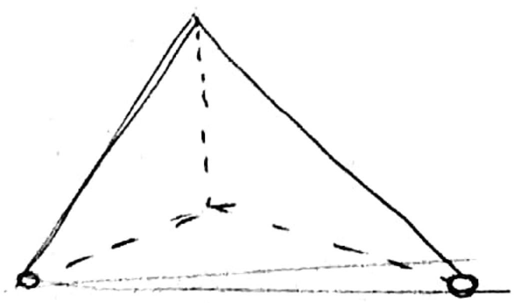
Το πρότυπο γεωμετρικό κ-πλέγμα είναι $\Delta_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i E_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ 0 \le t_i \le 1 \right\}$

είναι δηλ. κυρτό υποσ. του $\mathbb{R}^k$ που παράγεται από τις "κορυφές" $E_0, \dots, E_k$.

Π.χ. $\Delta_0 =$ ένα σημείο $= E_0$.

$\Delta_1 = [0, 1]$. $\Delta_2 =$  τρίγωνο με έσω.

$\Delta_3 =$ το στερεό τετράεδρο



$\Delta_k \cong D_k$ και $\partial \Delta_k \cong \partial D_k$
(τοπολογικά)

Ορισμοί: X ένας τ.χ. Ένα ιδιάζων k-πλέγμα είναι συνεχής απεικόνιση $\sigma : \Delta_k \to X$ π.χ. ένα ιδιάζων 0-πλέγμα είναι ένα σημείο. Ένα ιδιάζων 1-πλέγμα είναι ένα μονοπάτι της X.

• Με $S_k(X)$ την ελεύθερη αβελιανή με βάση όλα τα ιδιάζοντα k-συμπλέγματα. Ένα στοιχείο της $S_k(X)$ έχει την μορφή (ένα πεπερ. τυπικό άθροισμα)

$$n_1\sigma_1 + \dots + n_q\sigma_q = \sum_{\sigma} n_\sigma \sigma, \text{ όπου}$$

όπου $n_\sigma \in \mathbb{Z}$, σ ιδιάζων k-πλέγμα. Τα στοιχεία της $S_k(X)$ λέγονται ιδιάζουσες k-αλυσίδες.