Μάθημα 19 (08/05/2023)

$\Delta_k = [E_0, \dots, E_k]$

για κάθε $i \in \{0, \dots, k\}$ συμβ. με F_k^i την "κανονική" ομοιομορφική εμφύτευση

$$F_k^i : \Delta_{k-1} \longrightarrow \Delta_k$$

$$[E_0, \dots, E_k] \longmapsto [E_0, \dots, \hat{E_i}, \dots, E_k]$$

που απεικονίζει το Δ_{k-1} στην όψη του Δ_k που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή E_i.

<u>Ορσ</u>: Για κάθε ιδιάζον k-πλέγμα $\sigma : \Delta_k \to X$ ορίζουμε το <u>σύνορο</u> του σ.

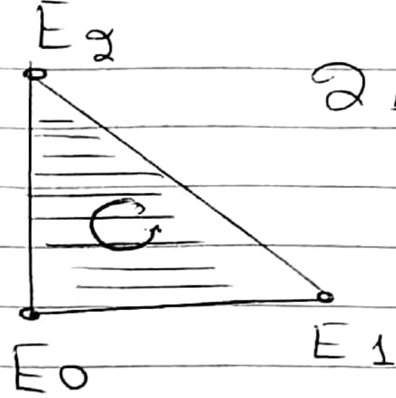
$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \underbrace{\sigma \circ F_k^i}_{\text{είναι η "i-όψη" του } \sigma} \in S_{k-1}(X)$$

<u>Π.χ.</u>: $\Delta_1 = [0,1]$ και $\sigma : \Delta_1 \to X$

$\sigma(1) \longrightarrow \partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$

$\sigma(0)$

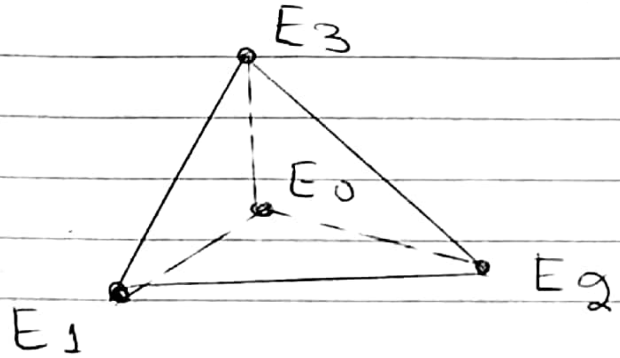
(2)



$$\partial \Delta_2 = [E_0, E_1] + [E_1, E_2] + [E_2, E_0]$$

$$= [E_0, E_1] + [E_1, E_2] - [E_2, E_0]$$

(3)



$\rightsquigarrow -[E_0, E_2, E_3]$

$\underbrace{[E_1, E_2, E_3]}_{+}, \underbrace{[E_0, E_3, E_2]}_{+}, \underbrace{[E_0, E_1, E_3]}_{+}$

$[E_0, E_2, E_1] \rightsquigarrow -[E_0, E_1, E_3]$

επαγόμενος

— σ

$$\partial \Delta_2 = [E_1, E_2, E_3] - [E_0, E_2, E_3] + [E_0, E_1, E_3] - [E_0, E_1, E_2].$$

Επεκτείνοντας γραμμικά την απεικόνιση του συνόρου ∂ προκύπτει ομομορφισμός.

$$\partial_k : S_k(X) \longrightarrow S_{k-1}(X)$$

"συνοριακός ομομορφισμός"

(3)

Πολλές φορές συμβ $\partial = \partial_k$

Το σύνορο μιας 0-αλυσίδας ορίζεται να είναι 0.

(Αν $\Sigma n_i \sigma_i \in S_0(X) \Rightarrow \partial(\Sigma n_i \sigma_i) = 0$)

Πρόταση: Οι συνοριακοί ομομορφισμοί ικανοποιούν την σχέση.

$$\boxed{\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0}$$

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X)$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$.

απόδειξη Αφού $S_{n+1}(X)$

ελεύθερη αβελιανή με βάση

..... αρκεί να δείξουμε

$\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = 0$.

Για τυχαίο $n+1$-ιδιάζον πλέγμα

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$\underbrace{F_{n+1}^{i} \circ F_n^{j} = F_{n+1}^{j} \circ F_n^{i-1}}_{(*)}$, αν $j < i$

$$\partial(\partial(\sigma)) = \partial\left(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \sigma \circ F_{n+1}^i\right)$$

$$= \sum_{i,j} \underbrace{(-1)^{i+j} \sigma \circ F_{n+1}^i \circ F_{n+1}^j}_{*}$$

$$= \sum_{j \geq i} * + \sum_{i < j} *$$

$$\overset{\text{?}}{=} \sum_{j \geq i} * + \sum_{j < i} \sigma \circ F_{n+1}^{\mu = j} \circ F_n^{\nu = i-1}$$

$$= \sum_{j \geq i} * + \sum_{\mu \leq \nu} (-1)^{\mu+\nu+1} \sigma \circ F_{n+1}^{\mu} \circ F_n^{\nu} = 0$$

ανα δυο εμφανίζονται με αντίθετο πρόσημο.

Έχουμε λοιπόν $\operatorname{Im}\partial_{n+1} \subseteq \ker\partial_n$.

<u>Ορσ</u> Η ομάδα (ιδιάζουσας) ομολογίας n-τάξης ενός τχ X είναι η ομάδα πηλίκο

$$\boxed{H_n(X) = \frac{\ker\partial_n}{\operatorname{Im}\partial_{n+1}}}$$

→ κύκλοι (αβελιανή)

↳ σύνορα

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X)$$

Με τω ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ομάδες ομολογίας με συντελεστές από ένα μεταθετικό δακτύλιο R ως $H_n(X,R)$

$S_k(X,R)$ = ελεύθερο R-πρότυπο επί των ιδιαζόντων k-πλεγμάτων του X.

Επαγόμενοι Ομομορφισμοί

Έστω X, Y τ.χ. και $\varphi: X \to Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Ορίζουμε

$\varphi_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ με

$$\begin{tikzcd} \Delta_n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\varphi\circ\sigma"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$\varphi_\#(\sigma) = \varphi\circ\sigma$.

(και επεκτείνουμε ...)

Παρατηρούμε

$$\varphi_\#(\partial\sigma) = \varphi_\#\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma\circ F_n^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\varphi\circ\sigma)\circ F_n^i = \partial(\varphi\circ\sigma)$$

⑥

Άρα $\varphi_{\#} \circ \partial = \partial \circ \varphi_{\#}$

Για την ακρίβεια το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, "\partial_n^X"] \arrow[d, "\varphi_{\#}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S_{n-1}(X) \arrow[d, "\varphi_{\#}"] \\ S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n^Y"'] & S_{n-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Από την σχέση $\varphi_{\#} \partial_n^X = \partial_n^Y \circ \varphi_{\#}$

έχουμε ότι

$$\varphi_{\#}\left(\ker \partial_n^X\right) \subseteq \ker \partial_n^Y$$

$$\varphi_{\#}\left(\operatorname{Im} \partial_n^X\right) \subseteq \operatorname{Im} \partial_n^Y.$$

Συνεπώς επάγεται (καλά ορισμένος) φ_* ομομορφισμός στις ομάδες ομολογίας.

$$\underset{\overset{\|}{H_n(\varphi)}}{\varphi_*} = \varphi_*^n : H_n(X) \to H_n(Y)$$

$$\underset{\overset{\|}{[\gamma]_{cl}}}{\gamma + \operatorname{Im}\partial_n^X} \mapsto \underset{\overset{\|}{[\varphi_{\#}(\gamma)]_{cl}}}{\varphi_{\#}(\gamma) + \operatorname{Im}\partial_n^Y}$$

(7)

Είναι άμεσα ότι από τους ορισμούς η ακόλουθη πρόταση.

<u>Πρόταση</u>: X, Y, Z τ.χ.

(α) ο επαγόμενος $id_X : X \to X$ είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός

$Id_{H_n(X)} = (id_X)_*$ (<u>1ο αξίωμα</u>)

(β) Αν $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{g} Z$, φ, g σω.

$\Rightarrow (g \circ \varphi)_* = g_* \circ \varphi_* : H_n(X) \to H_n(Z)$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>Πόρισμα</u> Αν $\varphi : X \to Y$ ομοιομορφισμός, τότε $H_n(\varphi)$ ισομορφισμός, $\forall n$.

<u>Ισχύει ότι</u>: $\varphi \simeq g \Rightarrow \varphi_* = g_*$

Ιδιαιτέρως, κάθε ομοτοπική ισοδυναμία, επάγει ισομορφισμό στις αντ. ομάδες ομολογίας.

<u>Πρόταση</u> Έστω $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ οι κ.τ.σ. συνιστώσες ενός τ.χ. X. Τότε

$$H_n(X) = \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda), \forall n$$

<u>απόδειξη</u> Η εικόνα ενός ενός πλέγματος του X (μέσω συνεχούς απεικόνισης) είναι κ.τ.σ., άρα θα περιέχεται σε κάποια συνεκτική συνιστώσα. Τότε

$$S_n(X) = \bigoplus_{\lambda} S_n(X_\lambda)$$

Από την γραμμικότητα των συνοριακών ομομορφισμών έπεται ότι αν

$$\gamma = \sum \gamma_\lambda \in S_n(X) \Rightarrow$$
$$\partial(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \partial(\gamma_\lambda) = 0, \forall \lambda.$$

Η απεικόνιση $H_n(X) \to \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda)$

$$[\gamma]_{cl} \mapsto \sum_{\lambda} [\gamma_\lambda]_{cl}, \gamma = \sum_{\lambda} \gamma_\lambda$$

είναι καλά ορσ., ισομορφισμός με αντίστροφο

$$\sum_{\lambda} [\gamma_\lambda]_{cl} \mapsto [\sum_{\lambda} \gamma_\lambda]_{cl}$$

- Αν $[\gamma]_{cl} = [\mu]_{cl} \Leftrightarrow \gamma - \mu \in \operatorname{Im} \partial_n$

$\Leftrightarrow$ $\gamma - \mu = \partial(\tau)$, $\tau = \sum \tau_\lambda$

$\Leftrightarrow$ $\sum_{\lambda} \gamma_\lambda - \mu_\lambda = \sum_{\lambda} \partial(\tau_\lambda) \Leftrightarrow \gamma_\lambda - \mu_\lambda = \tau_\lambda$

$\Leftrightarrow$ $[\gamma_\lambda]_{cl} = [\mu_\lambda]_{cl}$