(1)

Μάθημα 20 (12|05|2023.)

Αν $X \neq \emptyset$ κ.τ.σ. χώρος, τότε

$$H_0(X) = \mathbb{Z}.$$

Άρα για κάθε Y τ.χ.

$$H_0(Y) = \bigoplus_{\lambda} H_0(Y_\lambda) = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{Z}$$

όπου Y_λ οι κ.τ.σ. συνιστώσες του Y.

<u>απόδειξη</u>

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$H_0(X) = \frac{\ker \partial_0}{\mathrm{Im}\,\partial_1} = \frac{S_0(X)}{\mathrm{Im}\,\partial_1}$$

Ορίζουμε $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ με

$$\varepsilon\left(\sum n_i \sigma_i\right) = \sum n_i$$

η οποία είναι ομομορφισμός ως "γραμμική" επέκταση της $\sigma_i \mapsto 1$ για κάθε ιδιάζον 0-πλέγμα.

- <u>ε είναι επί</u>: $n \in \mathbb{Z}$, $X \neq \emptyset$

Επιλέγουμε $x_0 \in X$ και θεωρούμε

②

$\sigma_0 : \Delta_0 \to X$, $\sigma_0(0) = x_0 \Rightarrow$

$m = \varepsilon(m\sigma_0)$.

- $\underline{\operatorname{Im}\partial_1 \subseteq \ker(\varepsilon)}$:

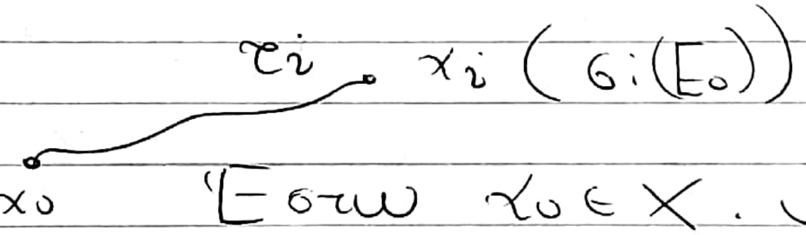
Αν $\sum n_i \tau_i \in S_1(X)$

$\Rightarrow \varepsilon\partial_1\left(\sum_{n_i}(n_i\tau_i)\right) = \varepsilon\left[\sum_{n_i} n_i \tau_i(E_1) - \tau_i(E\text{[illegible]}\right.$

$= \sum n_i - \sum n_i = 0$.

- $\underline{\ker(\varepsilon) \subseteq \operatorname{Im}\partial_1}$:

Έστω $\sum n_i\sigma_i \in \ker(\varepsilon) \Rightarrow \sum n_i = 0$.



Έστω $x_0 \in X$. Αφού X κ.τ.σ., υπάρχει μονοπάτι τ_i από το x_0 ως $x_i = \sigma_i(E_0)$

Έστω $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$, $\sigma_0(E_0) = x_0$

Θεωρούμε την 1-αλυσίδα και έχουμε

$\partial_1\left(\sum n_i\tau_i\right) = \sum n_i\left(\tau_i(E_1) - \tau_i(E_0)\right)$

$= \sum n_i\sigma_i - \underbrace{\sum n_i \sigma_0}_{0} = \sum n_i\sigma_i \in \operatorname{Im}\partial_1$.

③

Τελικά $ker(\varepsilon) = Im\,\partial_1$ και

$$H_0(X) = \frac{S_0(X)}{Im\,\partial_1} \cong \mathbb{Z}.$$

<u>Πρόταση</u> (Αξίωμα Διαστάσεως)

Αν $X = \{x_0\}$, τότε

$H_n(X) = 0$, $\forall n \neq 0$ και $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

<u>απόδειξη</u>

X μονοσύνολο, άρα για κάθε n υπάρχει μοναδικό ιδιάζον n-πλ. το $\sigma_n : \Delta_n \to \{x_0\}$ και συνεπώς

$$S_n(X) = \langle \sigma_n \rangle = \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1}$$

$$\Rightarrow \partial_n(\sigma_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ \underset{\neq 0}{\sigma_{n-1}}, & n \text{ άρτιος}. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, $\partial_n \equiv 0$ αν

(4)

n περιττός n δn ισομορφισμός
αν n άρτιος και $\neq 0$.

$$\cdots \longrightarrow S_4(x) \xrightarrow[\cong]{\partial_4} S_3(x) \xrightarrow[0]{\partial_3} \underbrace{S_2(x)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow[\cong]{\partial_2} \underbrace{S_1(x)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow[0]{\partial_1} \underbrace{S_0(x)}_{=\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$H_3(x) = \frac{\ker \partial_3}{\operatorname{Im} \partial_4} = \frac{S_3(x)}{S_3(x)} = 0.$$

$$H_2(x) = \frac{\ker \partial_2}{\operatorname{Im} \partial_3} = \frac{0}{\operatorname{Im} \partial_3} = 0.$$

<u>Ορσ</u> (για αβελιανές ομ. ή R-πρότυπα

- Μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών της μορφής

$$(A): \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{a_{n+1}} A_n \xrightarrow{a_n} A_{n-1} \xrightarrow{a_{n-1}} \cdots$$

λέγεται <u>ακριβώς</u> αν $\operatorname{Im} a_{n+1} = \ker a_n$ $\forall n$.

- Μια <u>βραχεία ακριβής ακολουθία</u> (β.α.α.) είναι μια ακριβώς ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

- Ένα <u>αλυσωτό σύμπλεγμα</u> είναι μια ακολουθία αβελιανών

(5)

ομάδων και ομομορφισμών της ισορροπίας

$$\mathbb{A}_* : \cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

τ.ω. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, $\forall n$.

- η n-οστή ομάδα ομολογίας $H_n(\mathbb{A}_*)$ του αλυσωτού συμπλ. ορίζεται με τον προφανή τρόπο

$$H_n(\mathbb{A}_*) = \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$$

Παραδείγματα:

(1) Οι ομάδες ομολογίας ενός τ.χ. είναι οι ομάδες ομολογίας

$$S_*(X) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

(2) Οι ομάδες ανηγμένης ομολογίας $\tilde{H}_n(X)$ ενός χώρου $X \neq \phi$ είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπ.

$$\cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

όπου $\varepsilon\left(\sum n_i \sigma_i\right) = \sum n_i$

⑥

Έχουμε δείξει ότι $Im\,\partial_1 \subseteq ker(\varepsilon)$

Άρα, έχουμε πράγματι συμπ.

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{ker(\varepsilon)}{Im\,\partial_1}, \quad H_0(X) = \frac{S_0(X)}{Im\,\partial_1}$$

$$\begin{tikzcd}
S_0(X) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{Z} \\
 & \frac{S_0(X)}{Im\,\partial_1} \arrow[u, "\tilde{\varepsilon}"']
\end{tikzcd}$$

Αφού $Im\,\partial_1 \subseteq ker(\varepsilon)$ κ ε επάγει επιμορφ. $\tilde{\varepsilon}$ με

$\tilde{\varepsilon} : S_0(X)/Im\,\partial_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι $ker\,\tilde{\varepsilon} = \tilde{H}_0(X)$

Αφού $\mathbb{Z}$ είναι ελευθ. αβελ.

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus ker\,\tilde{\varepsilon} \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X).$$

Τελικά,

$$H_n(X) = \begin{cases} \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \\ \tilde{H}_n(X), & n > 0 \end{cases}$$

<u>Ορσ.</u> Μια <u>αλυσωτή</u> απεικόνιση (μορφισμός συμπλ.)

μεταξύ δύο συμπλ. A_*, B_*

$F: A_* \to B_*$ είναι μια οικογένεια ομομορφισμών

$$\{\varphi_n : A_n \to B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

τ.ω.

$$\begin{tikzcd}
A_*: \cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial^A_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_n \arrow[r, "\partial^A_n"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\partial^A_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
B_*: \cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial^B_{n+1}"'] & B_n \arrow[r, "\partial^B_n"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

δηλ. $\boxed{\varphi_n \circ \partial^A_{n+1} = \partial^B_{n+1} \circ \varphi_{n+1}}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Οι ομομορφισμοί $S_n(X) \xrightarrow{\varphi_\#^n} S_n(Y)$ όπου $\varphi: X \to Y$ συνεχής, ορίζουν μια αλυσωτή απεικόνιση μεταξύ των συμπλ.

$$S_*(X) \xrightarrow{\varphi_\#} S_*(Y). \qquad \#$$

- Κάθε αλυσωτή απεικόνιση απεικονίζει "εικόνες" σε "εικόνες" και "πυρήνες" σε "πυρήνες".

⑧

Άρα επάγει ομομορφισμό
$H_n(f): H_n(A_*) \to H_n(B_*)$.
στις αντ. ομάδες ομολογίας.

Είναι άμεσο από τους ορισ. ότι

① $H_n(id_{A_*}) = id_{H_n(A_*)}$

② $H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$.

<u>Μακρά Ακριβής Ακολουθία</u>

Έστω:

$0 \to A_* \xrightarrow{\alpha} B_* \xrightarrow{\sigma} \Gamma_* \to 0$

μια σ.α.α. συμπλεγμάτων δηλ. αλυσωτές απεικονίσεις α και σ. τ.ω. $\forall n$: $0 \to A_n \xrightarrow[\alpha_n]{} B_n \xrightarrow[\sigma_n]{} \Gamma_n \to 0$.

δηλ. μεταθ. της μορφής

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d, "\partial_{n+2}"] & \arrow[d, "\partial_{n+2}"] & \arrow[d, "\partial_{n+2}"] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & \Gamma_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & \Gamma_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>Πρόταση</u>: Μια σ.α.α όπως πριν

$$0 \to A_* \to B_* \to \Pi_* \to 0$$

δίνει μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία

$$\cdots \to H_n(A_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(B_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(\Pi_*) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(A_*) \to H_{n-1}(B_*) \to H_{n-1}(\Pi_*) \to \cdots$$

όπου ∂_n^* κατάλληλος ομομορφισμός