9

Πρόταση: Μια σ.α.α όπως πριν

$$0 \to A_* \to B_* \to \Gamma_* \to 0$$

δίνει μακρά ακριβή ακολουθία στην ομολογία

$$\cdots \to H_n(A_*) \xrightarrow{H_n(\alpha)} H_n(B_*) \xrightarrow{H_n(\beta)} H_n(\Gamma_*) \xrightarrow{\partial_n^*} H_{n-1}(A_*) \to H_{n-1}(B_*) \to H_{n-1}(\Gamma_*) \to \cdots$$

όπου ∂_n^* κατάλληλος ομομορφισμός

Μάθημα 21ο (14/05/2023)

Το αξίωμα της ομοτοπίας.

Ορσ: Έστω $f, g : X \to Y$ συνεχείς μεταξύ τ.χ. X, Y και $f_\#, g_\# : S_*(X) \to S_*(Y)$ οι επαγόμενες αλυσωτές απ.

Μια <u>αλυσωτή ομοτοπία</u> μεταξύ των $f_\#, g_\#$ είναι μια ακολουθία ομομορφ.

$$\{P_n : S_n(X) \to S_{n+1}(Y)\}_n$$

έτσι ώστε

$$g_\# - f_\# = P_{n-1} \circ \partial_n^X + \partial_{n+1}^Y \circ P_n$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(X) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "g_\# - f_\#"] \arrow[dl, dashed] & S_n(X) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_\# - f_\#"] \arrow[dl, "P_n"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{n+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & S_n(Y) \arrow[r, "\partial_n"'] & S_{n-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

__Πρόταση__: Αλυσωτά ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν τις ίδιες απεικονίσεις στις ομάδες ομολογίας

__απόδειξη__.

$H_n(f), H_n(g): H_n(X) \to H_n(Y)$.

όπου f, g αλ. ομοτοπικές.

Έστω $[\gamma] \in H_n(X)$. Τότε

$$g_\#(\gamma) - f_\#(\gamma) = P_{n-1} \circ \underbrace{\partial_n^X(\gamma)}_{0} + \partial_{n+1}^Y \circ P_n(\gamma) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}^Y$$

$\Rightarrow H_n(f)([\gamma]) = H_n(g)([\gamma])$. □

~~Πόρισμα: Αν $f: X \to Y$~~

__Θεώρημα__: Έστω $f, g: X \to Y$ ομοτοπικές ισοδύναμα μι

$\Rightarrow H_n(f) = H_n(g)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Πόρισμα: Αν $\varphi: X \to Y$ ομοτοπική ισοδυναμία, τότε $H_n(\varphi): H_n(X) \to H_n(Y)$ είναι ισομορφισμός, $\forall n$.

Πόρισμα: Αν X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο, τότε

$$H_n(X) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & n = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη (Θεωρήματος)

Έστω $\varphi, g: X \to Y$ ομοτοπικές και $F: X \times I \to Y$ ομοτοπία από την φ στην g.

Ν.δ.ο. φ, g είναι αλυσωτά ομοτοπικές. Θέλω:

$P_n: S_n(X) \to S_{n+1}(Y)$ έτσι ώστε,

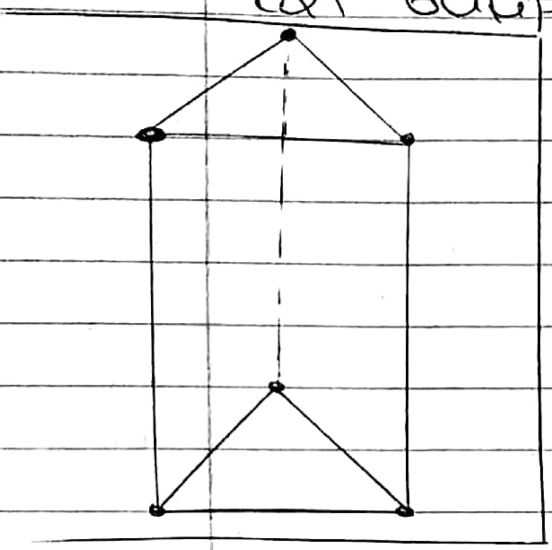
Αρκεί η P_n να οριστεί στα στοιχεία της βάσης της $S_n(X)$ δηλ. στο τυχαίο ιδιάζον n-πλεύρο

$$\sigma: \Delta_n \to X$$

Έστω λοιπόν $\sigma: \Delta_n = [E_0, \ldots, E_n] \to X$

④

Θεωρούμε το "πρίσμα" $\Delta_n \times I$ και συμβ. $v_i = (E_i, 0)$, $w_i = (E_i, 1)$



υποδιαιρούμε το $\Delta_n \times I$ σε $n+1$ πλέγματα $[v_0 \ldots v_i, w_i, \ldots w_n]$ και θεωρούμε την εικόνα σ_i^{n+1} μέσω της $\sigma \times Id \cdot \Delta_n$.

$$\sigma_i^{n+1} : \sigma \times Id \big|_{[v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots w_n]}.$$

Για κάθε n ορίζουμε $P_n : S_n(X) \to S_{n+1}(I)$ με

$$P_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ \sigma_i^{n+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ \left[\sigma \times id [\ldots]\right] \in S_{n+1}(I).$$

Έχουμε

$\underline{1o}$

$$\partial P_n(\sigma) = \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ \left(\sigma \times id\right)\Big|_{[v_0, \ldots \hat{v}_j \ldots v_i, w_i \ldots w_n]} +$$

(5)

$$+ \sum_{i\le j} (-1)^i (-1)^{j+1} F_0(6\times id)\Big|_{[v_0 \ldots v_i, w_i, \ldots \hat{w}_j, \ldots w_n]} \qquad \underline{\underline{2_0}}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι

$i=j=v>0$ στο $\underline{\underline{1_0}}$ άθροισμα αλληλοαναιρούνται με τους όρους $i=j=v-1$ στο 2_0 εκτός από την περίπτωση $i=j=0$ και $i=j=n$.

Πράγματι,

$\underline{\underline{1_0}}$ $\quad i=j=v \rightsquigarrow [v_0, \ldots \hat{v}_v, w_v, \ldots w_n]$

$\underline{\underline{2_0}}$ $\quad i=j=v-1 \rightsquigarrow [v_0, \ldots v_{v-1}, \hat{w}_{v-1}, \ldots w_n]$

- Για $i=j=0$ το άθροισμα δίνει

$$F_0(6\times id)\Big|_{\underbrace{[w_0 \ldots w_n]}_{\Delta^n\times\{1\}}} = F_0(6\times\{1\}) = g_\#(6).$$

- Για $i=j=n$

$$-F_0(6\times id)\Big|_{\underbrace{[v_0 \ldots w_n]}_{\Delta^n\times\{0\}}}$$

$$= -F_0(6\times\{0\}) = -f_\#(6).$$

⑥

Επίσης έχουμε

$$P_{n-1}\,\partial(\sigma) = P_{n-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,\sigma\Big|[E_0,\dots,\hat{E_j},\dots,E_n]$$

$$= \sum_{i\leq j}(-1)^{(i-1)+j}F_0(\sigma\times id)\Big|[v_0,\dots,\hat{v_j},\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]$$

ξ
i-1-θέση

$$+\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}F_0(\sigma\times id)\Big|[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w_j},\dots,w_n]$$

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι οι όροι που μένουν μετά τις απλοποιήσεις στο άθροισμα για το $\partial P_n(\sigma)$ είναι ακριβώς:

$$-P_{n-1}\,\partial(\sigma),\ g_\#(\sigma),\ -f_\#(\sigma).$$

$$\Rightarrow \partial P_n(\sigma) = -P_{n-1}\partial(\sigma) + g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma).$$

και η $\{P_n : S_n(X)\to S_{n+1}(Y)\}_n$

είναι αλυσωτή ομοτοπία.

Σχετική Ομολογία

Έστω X τ.χ και A υπόχωρος του X.

Συμβ. με $S_n(A)$ τις ιδιάζουσες $n-$αλυσίδες του X που είναι

(φ)

αθροισμα n-πλεγμάτων των οποίων οι εικόνες περιέχονται στο A. Δηλ. $\sigma_i : \Delta_n \to X$ με $Im\,\sigma_i \subseteq A$.

Είναι άμεσο ότι $S_n(A) \leq S_n(X)$ και ορίζεται η ομάδα πηλίκο

$$S_n(X,A) := S_n(X)/S_n(A).$$

Η συνοριακή απεικόνιση

$$\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$

απεικονίζει $S_n(A)$ στο $S_{n-1}(A)$ άρα επάγεται ομομορφ. $\partial : S_n(X,A) \to S_{n-1}(X,A)$ με $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Συνεπώς έχουμε αλυσωτό συμπλεγμα

$$S_*(X,A) : \cdots \xrightarrow{\partial} S_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial} S_n(X,A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X,A) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Οι ομάδες σχετικής ομολογίας του ζεύγους (X,A) είναι οι ομάδες ομολογίας του συμπλέγματος $S_*(X,A)$

$$H_n(X,A) := H_n[S_*(X,A)]$$

<u>Λήμμα:</u> Αν $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

και X κ.τ.σ. $\to H_0(X,A) = 0$.

<u>απόδειξη:</u>

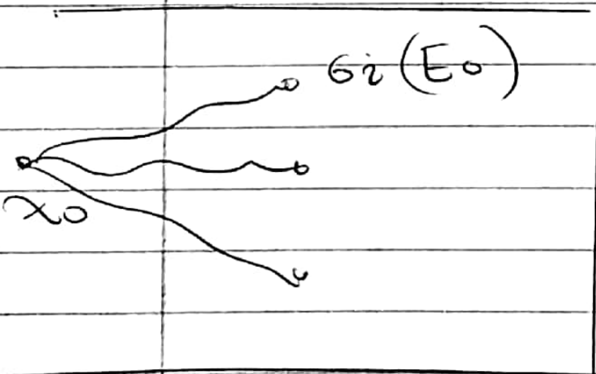
$$\cdots \longrightarrow \frac{S_1(X)}{S_1(A)} \xrightarrow{\partial_1} \frac{S_0(X)}{S_0(A)} \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$\underbrace{\frac{S_1(X)}{S_1(A)}}_{S_1(X,A)} \qquad \underbrace{\frac{S_0(X)}{S_0(A)}}_{S_0(X,A)}$$

$$H_0(X,A) = S_0(X,A) / \operatorname{Im} \partial_1 .$$

Έστω $\gamma + S_0(A) \in S_0(X,A)$

και $\gamma = \sum n_i \sigma_i \in S_0(X)$.



Επιλέγω $x_0 \in A$
Εφόσον X κ.τ.σ.
μπορώ να θεωρήσω
μονοπάτια τ_i από
το x_0 στο $x_i = \sigma_i(E_0)$.
και την 1-αλυσίδα

$\sum n_i \tau_i$. Παρατηρούμε ότι

$$\partial_1 \left[\sum n_i \tau_i + S_1(A) \right]$$

$$= \sum n_i \partial_1(\tau_i) + S_0(A)$$

$$= \sum n_i (x_i - x_0) + S_0(A).$$

$$= \sum n_i \sigma_i - \underbrace{\sum n_i \sigma_{x_0}}_{\in A} + S_0(A)$$

(9)

$= \sum n_i \sigma_i + S_0(A)$, όπου $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$,

$\sigma_0(E_0) = x_0$.

$\Rightarrow \partial_1 : S_1(X, A) \to S_0(X, A)$

είναι επί άρα $H_0(X, A) = 0$

□

Άσκηση

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda, A \cap X_\lambda)$$

όπου $\{X_\lambda\}$ οι κ.τ.σ. συνιστώσες του X και

$H_0(X, A) =$ ελεύθερη αβελιανή τάξεως $\{\lambda \in \Lambda \mid X_\lambda \cap A = \emptyset\}$

(1) ## Μάθημα 22ο

$S_n(A) \subseteq S_n(X)$, $A \subseteq X$ και

$S_n(X, A) := S_n(X) / S_n(A)$

$$S_*(X, A) : \cdots \to S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

$H_0(X, A) = 0$, αν $A \neq \emptyset$, X κ.τ.σ.