9

$= \sum n_i \sigma_i + S_0(A)$, όπου $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$, $\sigma_0(E_0) = x_0$.

$\Rightarrow \partial_1 : S_1(X, A) \to S_0(X, A)$ είναι επί άρα $H_0(X, A) = 0$

$\square$

Άσκηση

$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda, A \cap X_\lambda)$

όπου $\{X_\lambda\}$ οι κ.τ.σ. συνιστώσες του X και

$H_0(X, A) =$ ελευθέρα αβελιανή τάξεως $\{\lambda \in \Lambda \mid X_\lambda \cap A = \emptyset\}$

1 Μάθημα 22ο

$S_n(A) \subseteq S_n(X)$, $A \subseteq X$ και

$S_n(X, A) : S_n(X) / S_n(A)$

$S_*(X, A) : \cdots \to S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}(X, A) \xrightarrow{\partial} \cdots$

$H_0(X, A) = 0$, αν $A \neq \emptyset$, X κ.τ.σ.

Ο τρόπος ορισμού των συνοριακών απεικονίσεων εξασφαλίζει ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\partial"] & S_n(X) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\partial"] & S_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_{n-1}(A) \arrow[r, "i"'] & S_{n-1}(X) \arrow[r, "j"'] & S_{n-1}(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου i η ένθεση και j ο φυσικός επιμορφισμός.

Άρα έχουμε μια β.α.α συμπλεγμάτων:

$$0 \to S_*(A) \to S_*(X) \to S_*(X,A) \to 0 \qquad (I)$$

Η μακρά ακριβής ακολουθία του ζεύγους (X,A) είναι η μακρά ακριβής ακολουθία που αντιστοιχεί στην (I). Άρα

$$\cdots \to H_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \to \cdots$$

Παρατηρούμε ότι η ~~ένθεση~~.
$H_n(X,A)=0 \not\Leftrightarrow$ η ένθεση

(3)

$i: A \hookrightarrow X$ επάγει ισομορφισμούς

$$H_n(A) \cong H_n(X)$$

Πράγματι, αν $H_n(X, A) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (από την μ.α.α.)

$$0 \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \to 0.$$

$\Rightarrow$ i_* είναι ισομορφισμός.

Αντίστροφα, αν i_* ισομορφ.
από την μ.α.α.

$\operatorname{Im} \partial_* = \ker i_* = 0.$

$\operatorname{Im} i_* = H_n(X) = \ker j_* \Rightarrow j_* = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} j_* = \ker \partial_* = 0$. Άρα

$$H_n(X, A) = 0,\ \forall n.$$

Mayer – Vietoris.

Έστω $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ μια οικογένεια υποχώρων του X των οποίων τα εσωτερικά αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του X.

④

Ορίζουμε

$$S_n^{\mathcal{U}}(X) = \{ \gamma = \sum n_i \sigma_i \in S_n(X) \mid \text{κάθε } \operatorname{Im}\sigma_i \subseteq U_{j(i)} \in \mathcal{U} \}$$

$$= \langle S_n(U_j) \mid U_j \in \mathcal{U} \rangle \leq S_n(X)$$

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $\mathcal{U} = \{A, B\}$ τότε

$$S_n^{\mathcal{U}} = S_n^{\{A,B\}}(X) = S_n(A) + S_n(B)$$

Παρατηρώ ότι (εν γένει)

$$S_n(X) \neq S_n(A) + S_n(B)$$

Είναι άμεσο ότι η ∂ ~~είναι~~ απεικονίζει $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ σε $S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ και έτσι έχουμε σύμπλεγμα της μορφής:

$$S_*^{\mathcal{U}}: \cdots \xrightarrow{\partial} S_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_n^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} S_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

(5)

Ορίζουμε

$$H_n^{u}(X) = H_n(S_*^{u}(X))$$

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση: Η ένθεση

$$S_n^{u}(X) \xrightarrow{i} S_n(X)$$

είναι αλυσωτή ομοτοπική ισοδυναμία, συνεπώς επάγει ισομορφισμούς

$$\forall n : H_n^{u}(X) \cong H_n(X)$$

Θεώρημα (Mayer-Vietoris)

Έστω X τ.χ. και A, B υποχ. τ.ω $X = A^{\circ} \cup B^{\circ}$. Τότε υπάρχει μ.α.α.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

όπου ∂_* ο "συνεκτικός" ομομορφισμός και i_*, j_*, k_*, l_* οι επαγόμενοι των ενθέσεων.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "k"] & \\ A\cap B \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & B \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$ αντ.

<u>Σχέδιο Αποδείξεως</u>

Θεωρούμε τα αλυσωτά συμπλέγματα:

$S_*(A\cap B)$, $S_n(A)\oplus S_n(B)$ (με διαδ)

<u>και</u> $S_n^{\{A,B\}}(X)$. Παρατηρούμε ότι έχουμε σ.α. συμπλεγμάτων

$$0 \to S_*(A\cap B) \xrightarrow{\varphi} S_*(A)\oplus S_*(B) \xrightarrow{\psi} S_*^{\{A,B\}}(X)$$

όπου $\varphi(\sigma)=(\sigma,\sigma)$ και

$\psi(\sigma,\sigma')=\sigma-\sigma'$

Πράγματι, αν $\forall n$ η σ.α.

$$0 \to S_n(A\cap B) \to S_n(A)\oplus S_n(B) \to S_n^{\{A,B\}}(X) \to 0$$

είναι ακριβώς

- φ 1-1 ✓
- $\ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$: $\psi\circ\varphi = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subseteq \ker\psi$

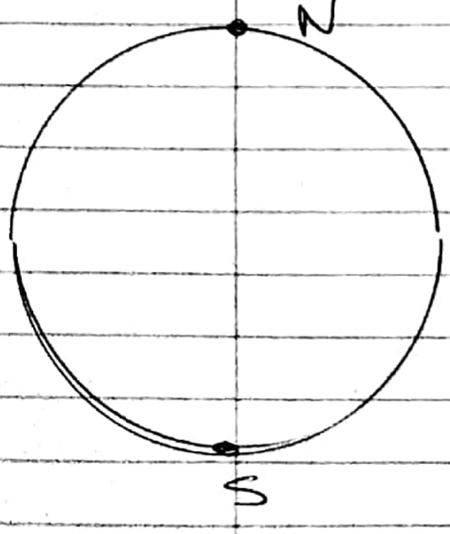
Αν $\psi(\gamma,\gamma') = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma' \in A\cap B$

δηλ. $\ker\psi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$.

- ψ επί : $\gamma + \gamma' = \gamma - (-\gamma')$

Το συμπέρασμα έπεται από την αντίστοιχη μ.α.α και των προηγούμενων προτάσεων.

Παράδειγμα : Ομάδες Ομολογίας του κύκλου. $X = S^1$.



Έστω $A = S^1 \setminus \{N\}$

$B = S^1 \setminus \{S\}$.

A, B ανοικτά (άρα εφαρμόζεται το Mayer Vietoris)

Τα A, B έχουν τον ίδιο

⑧

τύπο ομοτοπίας σημείου αφού είναι συμπτύξιμα ($A \simeq B \simeq \mathbb{R}$)

Άρα,

$$H_n(A) = H_n(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n=0 \\ 0, & n>0. \end{cases}$$

Επίσης, $A \cap B$ αποτελείται από δύο κ.τ.σ. συνεκτικές συνιστώσες κάθε μία από τις οποίες είναι επίσης συμπτύξιμη.

Άρα, $H_n(A \cap B) = \begin{cases} 0, & n>0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n=0 \end{cases}$

Από Mayer-Vietoris έχουμε την μ.α.α.

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B)$$

$$\longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

- Αν $n>1$: τότε προκύπτει

$$0 \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H_n(S^1) \longrightarrow 0 \Rightarrow$$

$$H_n(S^1) = 0, \ \forall n > 1.$$

Επίσης, $H_0(S^1) = \mathbb{Z}$, αφού S^1 κ.τ.σ.

<u>Για $n=1$:</u>

$$\cdots \to \underbrace{H_1(A\cap B)}_{0} \to \underset{0 \,\oplus\, 0}{H_1(A)\oplus H_1(B)} \to H_1(X) \to \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{H_0(A\cap B)}$$

$$\to \underset{\mathbb{Z}\,\oplus\,\mathbb{Z}}{H_0(A)\oplus H_0(B)} \to \underbrace{H_0(X)}_{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

<u>ε επί:</u> $\operatorname{Im}\varepsilon = \mathbb{Z}$ έπεται ότι

$\ker\varepsilon = \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{Im}\psi = \mathbb{Z}$

όπως πριν

$\Rightarrow \ker\psi = \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathbb{Z}$

φ 1-1

$\Rightarrow H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

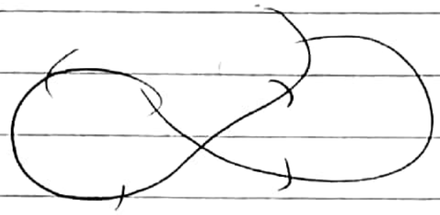
Δηλ.

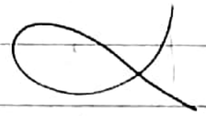
$$H_n(S^1) = \begin{cases} 0, & n>1 \\ \mathbb{Z}, & n=0 \text{ ή } 1 \end{cases}$$

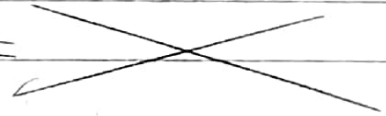
10

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$H_n\left(\bigvee_{i=1}^{n} S^1\right) = \begin{cases} 0, & n>1 \\ \mathbb{Z}^n, & n=1 \\ \mathbb{Z}, & n=0. \end{cases}$$

 $S^1 \vee S^1$

 $= A \simeq S^1$  $= B \simeq S^1$

$A \cap B =$  $\simeq \{*\}$.

<u>Μάθημα 23ο</u> 1

<u>Πρόταση</u>. $H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$

$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=n \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

<u>απόδειξη</u> $n=0$ ✓

Έστω $n>0$. Θεωρούμε