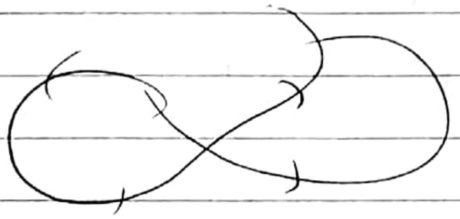
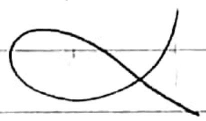
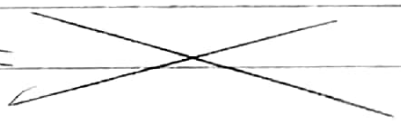
(10)

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$H_n\left(\bigvee_{i=1}^{n} S^1\right) = \begin{cases} 0, & n>1 \\ \mathbb{Z}^n, & n=1 \\ \mathbb{Z}, & n=0. \end{cases}$$

 $S^1 \vee S^1$

 $= A \simeq S^1$  $= B \simeq S^1$

$A \cap B =$  $\simeq \{*\}$.

Μάθημα 23ο

(1)

Πρόταση. $H_k(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$

$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=n \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Απόδειξη $n=0$ ✓

Έστω $n>0$. Θεωρούμε

$A = S^n \setminus \{S\}$, $B = S^n \setminus \{N\}$.

Τα A, B είναι ανοιχτά με $S^n = A \cup B$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε Mayer-Vietoris.

$A \cong B \cong \mathbb{R}^n$; Δηλ. A, B είναι συμπτύξιμα και έχουν ομολογία σημείου.

$$H_k(A) = H_k(B) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k=0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για την τομή $A \cap B$ έχουμε

$$A \cap B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{*\} \simeq S^{n-1}$$

Για $k > 1$, από M-V. έχουμε

$$\cdots \longrightarrow H_k(A \cap B) \longrightarrow \cancel{H_k(A)}^{0} \oplus \cancel{H_k(B)}^{0} \longrightarrow H_k(S^n) \longrightarrow H_{k-1}(A \cap B) \longrightarrow \cancel{H_{k-1}(A)}^{0} \oplus \cancel{H_{k-1}(B)}^{0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1})} \quad (1)$$

$$\left(= H_{k-1}\, A \cap B\right)$$

③

Για $k=1$, $n\neq 1$ έχουμε τα ακόλουθα τμήμα ακριβούς ακολουθίας από M.-V.

$$\cdots \to \cancel{H_1(A)}^{=0} \oplus \cancel{H_1(B)}^{=0} \to H_1(S^n)$$
$$\to H_0(A\cap B) \xrightarrow{\cong\mathbb{Z}} \underbrace{H_0(A)}_{\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{H_0(B)}_{\mathbb{Z}}$$
$$\to \underbrace{H_0(S^n)}_{\mathbb{Z}} \to 0$$

Άρα έχουμε ακριβή ακολουθία

$$0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{w} \mathbb{Z} \to 0.$$

w επί $\Rightarrow \ker w = \mathbb{Z} = \operatorname{Im}\psi$

$\Rightarrow \ker\psi = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = \{0\}$

$\Rightarrow$ $\boxed{H_1(S^n) = 0, \text{ για } n\neq 1}$ ②

Το συμπέρασμα έπεται με επαγωγή από ①, ② και το πρώτο παράδειγμα.

Πόρισμα: Αν $n \geq 1$, τότε δεν υπάρχει συστολή $r: D^{n+1} \to S^n$.

απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει. Τότε, υπάρχει μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & D^{n+1} \arrow[d, "r"] \\ & S^n \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} \underbrace{H_n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \arrow[r, "i_*"] \arrow[dr, "Id_{H_n}"'] & H_n(D^{n+1}) = 0 \arrow[d, "r_*"] \arrow[dl, phantom, "G"] \\ & \underbrace{H_n(S^n)}_{\cong \mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

άτοπο □

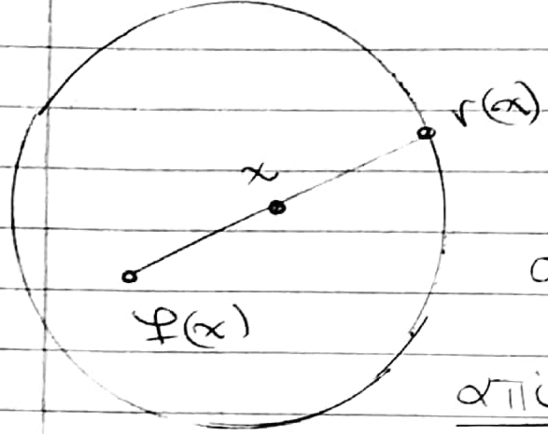
Θεώρημα (σταθερού σημείου του Brouwer)

Αν $\varphi: D^{n+1} \to D^{n+1} \Rightarrow$ υπάρχει $x \in D^{n+1}$: $\varphi(x) = x$.

απόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι $\varphi(x) \neq x$, $\forall x \in D^{n+1}$, ⑤

τότε, όπως για D^2, ορίζεται συστολή $r: D^{n+1} \to S^n$.

∎



Θεώρημα

αν $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Rightarrow n = m$

απόδειξη..

Είναι άμεσο ότι $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}$, $\forall n > 1$ με επιχείρημα συνεκτικότητας.

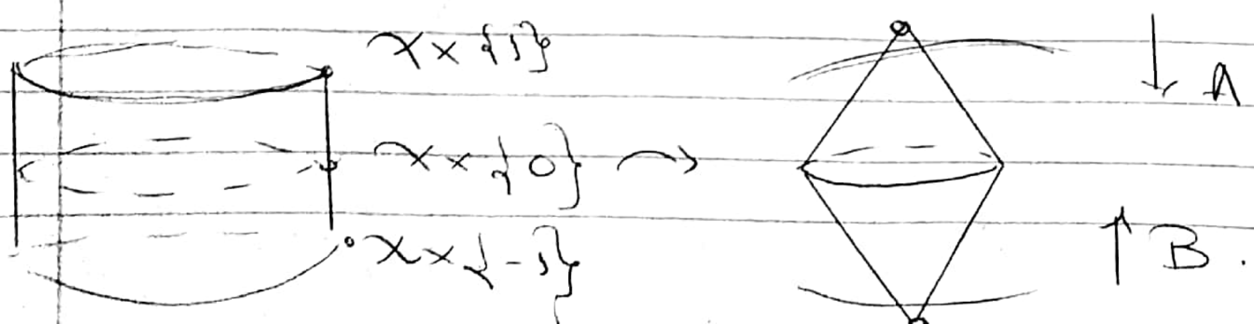
Έστω $n, m \geq 2$ και $\mathbb{R}^n \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \{x\}}_{\simeq S^{n-1}} \cong \underbrace{\mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(x)\}}_{\simeq S^{m-1}}$$

$$\Rightarrow n-1 = m-1 \Rightarrow n = m.$$

∎

• SX = ο χώρος πηλίκο που προκύπτει από το $X \times [-1,1]$ θεωρώντας τους υποχώρους $X \times \{-1\}$, $X \times \{1\}$ ως διαφορ. σημεία.



⑥

Άσκηση: Έστω X, Y τ.χ. $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

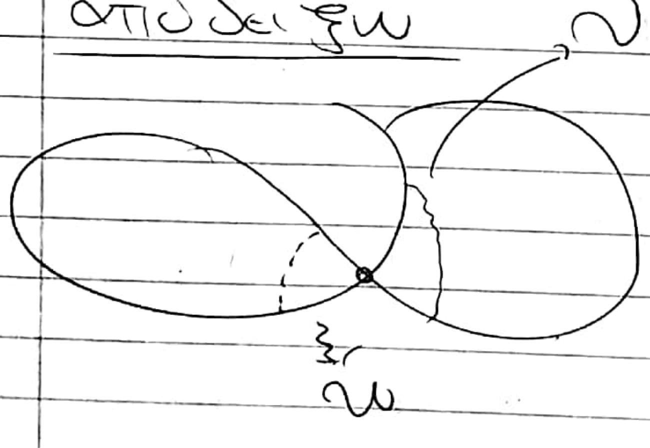
"υπάρχουν ανοικτές περιοχές U, V των x_0, y_0 αντ. και περιστολές $U \to \{x_0\}$, $V \to \{y_0\}$."

Αν $X \vee Y = X \sqcup Y \big/ x_0 = y_0$

$$\Rightarrow H_n(X \vee Y) = H_n(X) \oplus H_n(Y)$$

$n > 0$.

απόδειξη



$A = X \cup V$ (εικόνα στη $X \vee Y$)

$B = Y \cup U$

$\Rightarrow A \simeq X$, $B \simeq Y$, $A \cap B \simeq \{*\}$

$$\cdots \to H_n(A \cap B) \to \underbrace{H_n(A) \oplus H_n(B)}_{\simeq\, H_n(X) \oplus H_n(Y)} \to H_n(X \vee Y) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots$$

f

Εκτομή (Excision)

Θεώρημα: X τ.χ. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα, τα οποία είναι ισοδύναμα:

(1) Αν $Z \subseteq A \subseteq X$: $\bar{Z} \subseteq A^\circ$ τότε η ένθεση

$$(X\setminus Z, A\setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$$

επάγει ισομορφισμούς:

$$H_n(X\setminus Z, A\setminus Z) \cong H_n(X, A), \ \forall n.$$

(2) Αν $X = A^\circ \cup B^\circ$, τότε η ένθεση

$$(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

επάγει ισομορφισμούς

$$H_n(B, A\cap B) \cong H_n(X, A), \ \forall n.$$

- (1) $\rightarrow$ (2) $Z = X\setminus B$
- (2) $\rightarrow$ (1) $B = X\setminus Z$

Σχέδιο αποδείξεως του (2)

8

Οι εμφυτευτές απεικονίσεις που δείχνουν στην ένδειξη:

$$Sn(A) + Sn(B) \hookrightarrow Sn(X)$$

επάγει ισομορφισμό στην ομολογία απεικονίζουν $Sn(A)$ σε $Sn(A)$.

Έτσι επάγονται οι αντίστοιχες απ. πηλίκο.

$$\frac{Sn(A)+Sn(B)}{Sn(A)} \hookrightarrow \frac{Sn(X)}{Sn(A)}$$

$$\rightsquigarrow Hn(X, A)$$

Επίσης, $\dfrac{Sn(B)}{Sn(A) \cap Sn(B)} \cong \dfrac{Sn(A)+Sn(B)}{Sn(A)}$.

$\rightsquigarrow Hn(B, B \cap A)$, αφού

$$Sn(A) \cap Sn(B) = Sn(A \cap B)$$

Τοπική Ομολογία

Έστω X Hausdorff, $x \in X$

Οι ομάδες τοπικής ομολογίας του X στο x είναι οι ομάδες

$$Hn(X, X \setminus \{x\})$$

9

Ισχύει ότι

$H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\})$

για κάθε ανοιχτή περιοχή του x.

Πράγματι, $X \setminus U$ κλ. $\subseteq X \setminus \{x\}$.

Οι ισομορφισμοί προκύπτουν από την εκτομή.

Παράδειγμα:

$H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) =$

$H_n(\mathbb{R}^m, \underbrace{\mathbb{R}^m \setminus \{0\}}_{A}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = m \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$H_0(X, A) = 0$, αφού X συν., $A \neq \emptyset$

Από μακρά ακριβή ακολουθία του ζεύγους $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$

$\cdots \to H_n(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \to H_n(\mathbb{R}^m) \to$

$H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$

$\to \cdots$ $n \geq 1$

$\Rightarrow n \geq 1$: $H_n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$

$\cong H_{n-1}(S^{m-1})$, $m \geq 2$