23)

(α) αν $\rho_1 \not\simeq \rho_2 \Rightarrow \langle \chi_{\rho_1} | \chi_{\rho_2} \rangle = 0$.

β) Αν ρ αναγωγη $\Rightarrow \langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1$ $(\Leftarrow)$.

<u>Μαθημα 03</u>

<u>Ορσ</u> Μια $f : G \to \mathbb{C}$ θα λεγεται <u>συναρτηση κλασης</u> (class function) αν ειναι σταθερη στις κλασεις συζυγιας της G.

Δηλ. $f(hgh^{-1}) = f(g)$ $\forall g, h \in G$

<u>Παράδειγμα</u>: Ο χαρακτήρας χ_ρ της G ειναι συνάρτηση κλάσης.

Αν $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$

αναπ. της G ορίζουμε

$$\langle \chi_{e_1} | \chi_{e_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{e_1}(g^{-1}) \, \chi_{e_2}(g)$$

<u>Ορολογία</u> Οι <u>ανάγωγοι</u>
<u>χαρακτήρες</u> είναι οι χαρακτήρες των αναγώγων αναπ. της G.

<u>Διάσπαση Αναπαράστασης</u>

<u>Θεώρημα</u>: Έστω (e, V) $1 \le \dim V < \infty$
<u>όχι</u> ανάγωγη και $e_1 \dots e_N$ οι ανάγωγες αναπ. της G (G πεπερ.) * (ως ισοδ.)

$\Rightarrow$ $e = \sum_{i=1}^{N} m_i e_i$ με (m_i → πολλαπλότητα.)

$m_i = \langle \chi_e | \chi_{e_i} \rangle$

ως ισομορφία

* Ισχύει ότι το # αναγώγων αναπ. της G = # Cl(G) ~> κλ. συζυγίας

απόδειξη

Αφού (e, ν) είναι υποαναλύ-

sable επιδέχεται ορθογώνια

διάσπαση σε ανάγωγες αναπ.

(ως προς το συγκεκριμένο εσ)

άρα είναι ευθύ άθροισμα ανα-

γώγων αναπ.

Ομαδοποιώ τους όρους στις

κλάσεις ισοδ. $e_1, \dots, e_N$

$$\Rightarrow e = \bigoplus_{i=1}^{N} m_i e_i$$

$$\Rightarrow \chi_e = \sum_{i=1}^{N} m_i \chi_{e_i} \Rightarrow$$

$\to$ σχέσεις ορθογων.

$$\langle \chi_e | \chi_{e_i} \rangle = m_i \qquad \square$$

Ορσ: m_i = η πολλαπλότητα

της e_i στην e.

$m_i e_i$: ισοτυπική συνιστώσα

της e_i στην e.

$e = \bigoplus_{i=1}^{n} m_i e_i$ ισοτυπική διάσπαση

Πόρισμα (α')

Η διάσπαση σε ισοτυπικές συνιστώσες είναι μοναδική (ως προς ισομ.).

Πόρισμα (β')

$\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2} \Rightarrow \rho_1 \sim \rho_2$

↳ έχουν την ίδια ισοτυπική διάσπαση.

Θεώρημα (κριτήριο αναγωγισιμότητας)

Η ρ είναι αναγωγή $\Leftrightarrow$

$$\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = 1.$$

απόδειξη :

→ από 16. διασπ

$$\langle \chi_\rho | \chi_\rho \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$$

□

Εφαρμογή: "Αριστερή Κανονική Αναπαράσταση"

Έστω δράση: $G \times M \to M$

Τότε η G δρα γραμμικά στο $F(M) = \{f : M \to \mathbb{C}\}$

Δηλ. $G \times F(M) \to F(M)$

$(g, f) \longmapsto g.f$ με

$$g f(x) = f(g^{-1}x), \ \forall x \in M$$

Παράδειγμα: $M = G$

και δράση: αριστερός πολλ/μος

$$G \times G \xrightarrow{l} G$$

$$(g, x) \mapsto g x = l_g(x)$$

όπου $l_g : G \to G$ με

$$l_g(x) = g x.$$

Από αυτήν την δράση παίρνουμε την "<u>αριστερή κανονική αναπαράσταση</u>" <u>της G</u>

$$\lambda : G \to GL(\mathbb{C}G)$$

$$\lambda(g)(f)(w) = f(g^{-1}w)$$

[* Αν συμβ. με $e_g = \chi_{\{g\}}$ τότε κάθε $f \in \mathbb{C}G$ μπορεί να γραφτεί ως $f = \sum_{g \in G} f(g) e_g$

$= \sum_{g \in G} v_g \cdot g$, οπότε

$$g \cdot \left(\sum_{w \in G} v_w w \right) = \sum_{w \in G} v_w (gw)$$]

Ο δ.χ $\mathbb{C}G$ έχει διάσταση $|G|$ και βάση $\{e_g\}_{g \in G}$ με $e_g(x) = \begin{cases} 1, & x = g \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

(29)

Έχουμε.

$$R_g(e_w)(k) = e_w(g^{-1}k)$$

$$= e_{gw}(k)$$

Πρόταση.

Στον δ.χ. $L^2(G) = \mathbb{C}(G)$ με εσ. γιν. η R είναι unitary.

απόδειξη Έστω $f_1, f_2 \in L^2(G)$

$\forall g \in G$:

$$\langle R(g)(f_1) \mid R(g)(f_2) \rangle$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} \overline{R(g) f_1 (w)}\, R_g(f_2)(w)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{n \in G} \overline{f_1(g^{-1}w)}\, f_2(g^{-1}w)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \overline{f_1(k)}\, f_2(k) = \langle f_1 \mid f_2 \rangle$$

□

• <u>Ο χαρακτήρας χ_R</u>.

• $\chi_R(e) = Tr[R(e)] =$

$= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G = |G|$

• για $g \neq e$, $\chi_R(g) = 0$

($R(g)(e_w) = e_{gw}$ άρα

υπάρχει 1 στη διαγώνιο

στη θέση (x,x) $\iff$

$x = gx$ σταθερό σημείο με

$|Fix(g)| = 0$ αν $g \neq e$)

<u>Ισχυρισμός</u>: Η R <u>δεν</u>

είναι ανάγωγη.

Έστω $\varphi = \sum_{g \in G} e_g \in \mathbb{C}G$

και $W = \langle \varphi \rangle$.

3

Τότε $W \leq \mathbb{C}G$ G αναλλοίωτος με $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$.

Πράγματι:

$$R(g)(f) = R(g)\left(\sum_{n} e_n\right)$$

$$= \sum_{n \in G} R(g)(e_n) = \sum_{n \in G} e_{gn}$$

$$= f \in W.$$

Η $R|_W$ είναι ισοδύναμη με την τετριμμένη.

<u>Πρόταση</u>: Η ισοτυπική αναπαράσταση της R είναι:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{N} n_i e_i \quad \text{με } e_1, \dots, e_N$$

ανάγωγες αναπ. της G και $n_i = \dim(e_i)$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$$

$$\langle \chi_e | \chi_{e_i} \rangle = \chi_{e_i}(e)$$

$$= \dim e_i$$

□

Θεώρημα

$$|G| = \sum_{i=1}^{N} n_i^2, \quad n_i = \dim e_i$$

απόδειξη:

$$|G| = \chi_R(e) = \sum_{i=1}^{N} n_i \, \chi_{e_i}(e)$$

$$= n_i^2$$

□

O Σχ. :

$$\left\{ \varphi : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \varphi \text{ συναρ. κλάσως} \right\}$$

(33)

έχει διάσταση ίση με το # των κλάσεων συζυγίας της G.

Στόχος: Θ.δ.ο. αυτός είναι ο αριθμός των ανάγωγων αναπ. της G.

- Έστω (V, ρ) τυχαία αναπ. της G και $f: G \to \mathbb{C}$ συνάρτηση.

Ορίζουμε ενδομορφισμό στον V ως εξής

$$\rho_f = \sum_{g \in G} f(g) \rho(g).$$

Λήμμα: (α) Αν η f είναι συνάρτηση κλάσης, η ρ_f μετατίθεται με την ρ.

(β) Αν η ρ είναι ανάγωγη $\Rightarrow \rho_f = |G| \langle \frac{f \mid \chi_{\rho^*}}{\dim \rho} \rangle Id_V$

(34)

<u>απόδειξη</u>:

(α) $(\rho_{f}\circ\rho)(g) = \sum_{n} f(n)\rho(n)\circ\rho(g)$

$= \sum_{n} f(n)\,\rho(\underbrace{n\circ g}_{k})$

$= \sum_{k} f(kg^{-1})\,\rho(k)$

$= \sum_{gn\in G} f(gng^{-1})\,\rho(gn)$

$= \sum_{n\in G} f(n)\,\rho(g)\circ\rho(n) =$

$= \rho(g)\circ\rho_{f}$

(β) Από το λήμμα του Schur

$\exists\, \lambda\in\mathbb{C} : \rho_{f} = \lambda\, Id_{V}$.

$\Rightarrow Tr[\rho(f)] = \sum_{g} f(g)\, Tr(\rho(g))$

$= \langle \bar{f}, \chi_{\rho}\rangle \cdot |G|$

$= \lambda \cdot \dim(V)$

Θεώρημα

Οι ανάγωγοι χαρακτήρες είναι ο.β. του δχ των συναρτήσεων κλάσης.

απόδειξη (θεωρ.)

Έστω $\rho_1 \dots \rho_n$ οι ανάγωγες αναπ. της G με $\rho_1 \nsim \rho_2$.

Δείξαμε ότι $\{\chi_{\rho_1} \dots \chi_{\rho_n}\}$ είναι ο.κ. υποσύνολο $\subseteq \mathcal{L}^2(G)$

Θ.δ.ο. παράγουν το σύνολο των συναρτήσεων κλάσης.

Έστω $\varphi : G \to \mathbb{C}$ σ.κ. τω.

$$\langle \varphi \mid \chi_{\rho_i} \rangle = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

Από το προηγούμενο λήμμα

$$(\rho_i)_{\bar{\varphi}} = 0 \quad \forall i = 1 \dots n$$

$\Rightarrow e_{\bar{\varphi}} = 0,\ \forall e$ αναπ. της G

$\Rightarrow 0 = R_{\bar{\varphi}}(e_g) = \sum_{n} \bar{f}(n) \underbrace{R(n)(e_g)}$

$= \sum_{n} \bar{f}(n) e_{ng},\ \forall g.$

$\Rightarrow 0 = R_{\bar{\varphi}}(e_1) = \sum \bar{f}(n) e_n$

$= \bar{\varphi} \Rightarrow \bar{\varphi} = 0.$ $\square$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω G πεπερ. Το # των ανάγωγων αναπαραστάσεων = # κλάσεων συζυγίας της G

Μάθημα 4ο.

Ορ. Μια τοπολογική ομάδα είναι μια ομάδα G εφοδιασμένη με τη δομή Hausdorff τ.χ. έτσι ώστε οι απεικονίσεις

- $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$
- $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$

να είναι συνεχείς.

- $\mathcal{L}(E, E) = \{ f : E \to E \mid f$ συνεχής κ' γρ. $\}$

E δ.χ.

αν δ.χ.

$GL(E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ ομάδα ισομορφισμών του E, δηλ.

$GL(E) = \{ f : E \to E \mid f$ 1-1, επί, γρ., συνεχής, f^{-1} συνεχής $\}$

Πρόταση: Σε δ.χ. με νόρμα, τα μοναδιαία (κλ.) είναι συμπαγής $\Leftrightarrow$ ο δ.χ. είναι πεπερασμένης διάστασης.

Πόρισμα. Έστω $\dim E < \infty$. Τότε κάθε κλειστό και φραγμένο $\subseteq GL(E)$ είναι συμπαγές.

• Έστω $(E, \langle , \rangle)$ χώρος Hilbert. Για κάθε γρ. τελεστή $U \in \mathcal{L}(E, E)$ θεωρώ τον adjoint U^* του U τ.ω.

$$\langle Ux, y \rangle = \langle x, U^* y \rangle$$

$\forall\, x, y \in E$.

Ορσ.: Ένα $u \in GL(E)$ θα λέγεται <u>unitary</u> αν

$$u u^* = u^* u = id_E.$$

(38)

Θέτουμε

$\mathcal{U}(E) = \{ u \in GL(E) \mid u \text{ unitary} \}$

• $L^2(S^1, \mu) = \{ \varphi : S^1 \to \mathbb{C} \mid \int_{S^1} |\varphi|^2 d\mu < \infty \}$

$\langle \varphi, g \rangle = \int_{S^1} \bar{\varphi} g \, d\mu$

• Κάθε $u \in \mathcal{U}(E)$ έχει νόρμα 1.

$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle}$

$= \sup_{\|x\| \leq 1} \sqrt{\langle x, u^* u(x) \rangle}$

$= \sup_{\|x\| \leq 1} \underbrace{\sqrt{\langle x, x \rangle}}_{\|x\|} = 1$

Συμπέρασμα: Το $\mathcal{U}(n, \mathbb{C})$ είναι συμπαγής τ.χ. $\subset GL_n(\mathbb{C})$.

- $SU(n,\mathbb{C}) = \{ U \in U(n,\mathbb{C}) \mid \det U = 1 \}$
$\subseteq U(n,\mathbb{C})$ συμπαγές ως κλ. υποσύνολο συμπαγούς.

- αν E είναι ένας $\mathbb{R}$-χώρος Hilbert.

$U(n,\mathbb{R}) = O(E) = \{ A \in GL(E) \mid AA^* = A^*A = Id_E \}$

= ορθογώνια ομάδα
(εδώ $A^* = A^t$).

$\to SO(n,\mathbb{R}) = \{ A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$

<u>Στόχος</u>: Να βρούμε τις αναπαραστάσεις $SU(2,\mathbb{C})$ και $SO(3)$.
$\hookrightarrow$ ισομετρίες του $\mathbb{R}^3$.

(1)

<u>Ορ.:</u> Εστω G τοπολογική ομάδα. Μια <u>συνεχής αναπαράσταση</u> της G είναι ένας χώρος Hilbert E και ένας ομομ. ομάδων

$$\rho: G \longrightarrow GL(E).$$

τ.ω. $\lim_{g \to e} \| \rho(g) - Id_E \| = 0$.

Η τετριμμένη αναπαράσταση

$$\rho(g) = Id_E, \; \forall g \in G.$$

<u>Παράδειγμα:</u>

- $G = U(1) = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \} = S^1$
- $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Πολλ/μος:</u> $e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$

<u>Αντιστροφή:</u> $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$

$\exp : \mathbb{R} \to U(1) = S^1$

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ μορφ. ομάδω.

$\ker(\exp) = 2\pi\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

Άρα έχουμε σ.α.α.

$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} U(1) \to 1$

$U(1)$ είναι αβελιανή ομάδα

__Ισχυρισμός:__ Οι 1-διάστατες αναπ. της $G = U(1)$ είναι όλες __unitary__ και δίνονται από τον τύπο.

$\Pi_k : e^{i\theta} \mapsto e^{ik\theta}$.

Τα ακόλουθα είναι εκτός ύλης και συμπληρώνονται για λόγους πληρότητας.

2.3

Πρόταση

Αν $\rho : G \to \mathbb{C}^*$ 1-διάστατη αναπαράσταση μιας συμπαγούς $G \Rightarrow |\rho(g)| = 1$ $\forall g \in G$.

απόδειξη

G συμπαγής $\Rightarrow \rho(G) \subseteq \mathbb{C}^*$ φραγμένο.

- αν $|\rho(g)| > 1 \Rightarrow |\rho(g^n)| = |\rho(g)|^n \to \infty$, άτοπο αφού $\rho(G)$ φρ.
- αν $|\rho(g)| < 1 \Rightarrow |\rho(g^{-1})| = |\rho(g)|^{-1} > 1$ άτοπο. □

(α)

Σημείωση: αν $G = U(1)$ κάθε 1-διάστατη αναπ. της G είναι ένας συνεχής ομομ. ομάδων

$$U(1) \longrightarrow U(1)$$

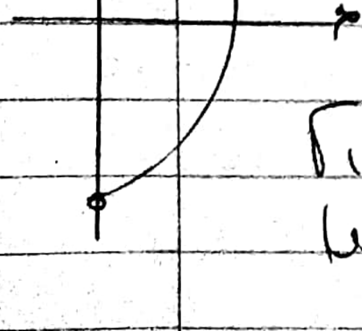
(ε) Επίσης, γενικότερα, αφού $U(1)$ αβελιανή, από το λήμμα του Schur (στη γενικότερη μορφή του) αποδεικνύεται ότι οι μοναδικές ανάγωγες αναπ. της $U(1)$ είναι οι 1-διάστατες.

Ορσ: Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\pi_n : U(1) \to U(1), \quad e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$$

Πρόταση: Πn είναι οι μόνες 1-διάστατες αναπ. της $U(1)$.

απόδειξη: Έστω $\rho : U(1) \to \mathbb{C}^*$



$$U = \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$\subseteq U(1)$ ανοικτό

Για κάθε $g \in U$ υπάρχει μοναδικό $u \in U$ τ.ω.

$$g = u^2. \quad (*)$$

(25)

• η e είναι συνεχής στο 1

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall\, \theta \in (-\delta, \delta) \Rightarrow$
$e(e^{i\theta}) \in U$

(η $\exp : \mathbb{R} \to U(1)$ είναι απ. πηλίκο, άρα e συνεχής $\Leftrightarrow e \circ \exp$ συνεχής)

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \frac{2\pi}{N} < \delta$ άρα

αν $w = e^{2\pi i / N} \Rightarrow e(w) \in U$

$1 = e(w^N) = [e(w)]^N \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z}$

με $-\frac{N}{2} < n < \frac{N}{2}$:

$$e(w) = e^{\frac{2\pi n i}{N}} = \pi_n(w).$$

Ισχυρισμός : $e = \pi_n$

Έστω $w_1 = e^{\pi i N} \Rightarrow w_1^2 = w.$

$\Rightarrow (e(w_1))^2 = e(w) = w^n$

$\Rightarrow e(w_1) = w_1^n = \pi_n(w_1)$

(46)

Με επαγωγή, αν

$$w_j = e^{2\pi i/2^j N}$$

αποδεικνύεται ότι $e(w_j) = \pi_n(w_j)$

άρα, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $e(w_j^k) = \pi_n(w_j^k)$

$\Rightarrow$ $e(e^{i\theta}) = \pi_n(e^{i\theta})$, για

κάθε θ της μορφής

$$\theta = \frac{2\pi i \cdot k}{2^j}, \; k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο

$$D = \left\{ e^{i\theta} \;\middle|\; \theta = \frac{2\pi k}{2^j}, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$\subseteq U(1)$ είναι πυκνό, όπου από

εκεί έπεται ότι $e(g) = \pi_n(g)$

$\forall g \in U(1)$.

$\square$