Μάθημα 05.

<u>Υπενθύμιση:</u>

Αν G πεπερ., $\forall \varphi \in \mathbb{C}[G]$ και $\forall g \in G$:

$$\sum_{h \in G} \varphi(h) = \sum_{h \in G} \varphi(gh) = \sum_{h} \varphi(hg)$$

Έστω $l_g, r_g : G \to G$

$$\Rightarrow \varphi(gh) = \varphi \circ l_g(h)$$

$$\varphi(hg) = \varphi \circ r_g(h)$$

<u>"Μέσος Όρος"</u>

$$M : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto M(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \varphi(g)$$

<u>Ιδιότητες</u> (α) M είναι

(48)

θετικών γραμμικών φορέων,
δηλ. αν $\varphi(x) \in \mathbb{R}, \forall x$
και $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow M(\varphi) \geq 0$.

(β) για κάθε $g \in G$

$$M(\varphi) = M(\varphi \circ l_g) = M(\varphi \circ r_g)$$

δηλ. M είναι αριστερά και δεξιά αναλλοίωτο

(γ) $M(1) = 1$.

<u>Θεώρημα</u> Έστω G (τοπικά) συμπαγής ομάδα.

Τότε

(α) υπάρχει θετικό μέτρο μ στην G που είναι πεπ. στα συμπαγή υποσύνολα (και <u>όχι</u> 0).

Το μ είναι αριστερά αναλλοίωτο δηλ. για κάθε ολοκληρώσιμη φ και $\forall h \in G$

$$\int_G \varphi(hg)\,d\mu(g) = \int_G \varphi(g)\,d\mu(g)$$

- Το μ είναι το μοναδικό ως προς $\lambda \in \mathbb{R}_+$ το.
- Αν $\varphi \geq 0$ και συνεχής

$$\int_G \varphi(g)\,d\mu(g) = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

(β) Αν G συμπαγής, υπάρχει μοναδικό αριστερά και δεξιά αναλλοίωτο μέτρο τ.ω.

$$\int_G d\mu(g) = 1$$

(γ) Αν G συμπαγής, κάθε αρ. αναλλοίωτο μέτρο είναι και δεξιά αναλλοίωτο.

(50)

<u>Ορσ</u>: $\forall$ G συμπαγής

Το μοναδικό αριστερά κ' δεξιά αναλλοίωτο μέτρο μ τ.ω.

$$\int_G d\mu(g) = 1$$

το λέγεται <u>μέτρο Haar</u>.

<u>απόδειξη</u>

(α)

(β) Έστω μ₀ ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο στο συμπ. G. $\forall$

$$\int_G d\mu_0 = m < \infty$$

τότε έστω $\mu = \frac{1}{m}\mu_0$, όπου

είναι άμεσο ότι μ είναι αριστερά αναλλοίωτο και

$$\int_G d\mu = 1.$$

(51)

Τώρα έστω μ ένα αριστερά αναλλοίωτο μέτρο σε μια τοπικά συμπ. ομάδα G

για κάθε $f \in C_c(G)$ (συνεχής με συμπαγή φορέα) ορίζουμε

$$\mu(f) = \int_G f(g)\,d\mu(g).$$

Για κάθε $u \in G$ ορίζουμε

$$\mu_u(f) = \int_G f(gu)\,d\mu(g) = \mu(f \circ r_u)$$

Τότε $\forall k \in G$

$$\mu_u(f \circ l_k) = \int_G f(kgu)\,d\mu(g)$$

$$= \int_G f(gu)\,d\mu(g) = \mu_u(f)$$

59

Από την μοναδικότητα των αριστερά αναλλοίωτων μέτρων υπάρχει $\Delta(u) > 0$:

$$\mu_u(f) = \Delta(u)\,\mu(f)$$

Αφού G είναι συμπαγής η σταθερή συνάρτηση είναι $\mathcal{L}^1(\mu)$ άρα

$$\forall u \in G : \underset{\mu(1)}{\underset{\parallel}{\mu_u(1)}} = \Delta(u)\,\mu(1)$$

$$\Rightarrow \Delta(u) = 1,\ \forall u \Rightarrow \Delta \equiv 1$$

Άρα το μ είναι επίσης δεξιά αναλλοίωτο.

Σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα, η συνάρτηση

$$\Delta : G \to \mathbb{R},\ u \mapsto \Delta(u)$$

καλείται modular συνάρτηση

53

Ικανοποιεί τη σχέση

$$\Delta(uu') = \Delta(u) \cdot \Delta(u')$$

αφού

$$\Delta(uu') \cdot \mu(f) = \mu_{uu'}(f)$$

$$= \mu(f \circ r_{uu'}) = \mu(f \circ r_{u'} \circ r_u)$$

$$= \Delta(u)\, \mu(f \circ r_u) = \Delta(u)\, \Delta(u')\, \mu(f).$$

Ορσ: Μια τοπικά συμπ. ομάδα G λέγεται unimodular αν $\Delta \equiv 1$

Παρατηρηση: Από την προηγούμενη απόδειξη είναι άμεσο ότι αν G συμπαγής $\Rightarrow$ G είναι unimodular.

Παραδειγμα: Αν G είναι αβελιανή, κάθε αριστερά αναλλοίωτο μέτρο είναι και δεξιά αναλλοίωτο.

Πράξεις με αναπαραστάσεις.

(α) Άθροισμα δύο χώρων Hilbert

$(H, \langle\,|\,\rangle_H)$ και $(K, \langle\,|\,\rangle_K)$

$H \oplus K$,

$\langle h_1 \oplus k_1 \mid h_2 \oplus k_2 \rangle =$

$= \langle h_1 \mid h_2 \rangle_H + \langle k_1 \mid k_2 \rangle_K$

(β) Έστω $\{H_i, \langle\,|\,\rangle_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ακολουθία χώρων Hilbert

Ορίζουμε

$$H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$$

$$= \left\{ (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \;\middle|\; \begin{array}{l} h_n \in H_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{H_i}^2 < \infty \end{array} \right\}$$

και

$$\langle (g_n)_n \mid (h_n)_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g_n \mid h_n \rangle_{H_n}.$$

Το εσωτ. γιν. είναι καλά ορισμένο. Αρκεί νδο

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle g_n \mid h_n \rangle_{H_n} \right| < \infty$$

Ορίζουμε $g', h' \in H$ ως εξής

$$g'(i) = \begin{cases} g(i), & \text{αν } \|g(i)\|_{H_i} > \|h(i)\|_{H_i} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$$h'(i) = \begin{cases} h(i), & \|h(i)\|_{H_i} > \|g(i)\|_{H_i} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\left| \langle g(i), h(i) \rangle_{H_i} \right| \le \|g_i\| \cdot \|h_i\|$$

$$\leq \|\underbrace{(g'+u')(i)}_{\in H}\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \langle g(i), u(i)\rangle_{H_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|(g'+u')(i)\|^2 < \infty$$

<u>Άσκηση</u>: Ο H είναι πλήρης.

- Αν (E_i, e_i) αριθμήσιμη οικογένεια unitary αναπαραστάσεων της G

($\Sigma\eta\mu.$ $e(g) \in GL(E)$ unitary

$\langle e(g)x \mid e(g)y\rangle = \langle x \mid y\rangle$

$\forall g \in G, \forall x, y \in E$)

θεωρούμε $\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i, \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i\right)$

<u>Παρατήρηση</u>: Κάθε E_i είναι κλειστός υπόχωρος του $\oplus E_i$ και $E_i \perp E_j$ $\forall i \neq j$

(59)

Ορσ.: Μια αναπαράσταση (E, ρ) της G λέγεται completely reducible (ή semisimple) αν είναι το ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων, δηλ.

$$(E, \rho) = \left(\bigoplus_i E_i, \bigoplus_i \rho_i \right)$$

όπου (E_i, ρ_i) ανάγωγες.

Ορσ Έστω V, W δ.χ. με $\dim V, \dim W < \infty$.

Το τανυστικό γινόμενο των V, W είναι ο χώρος πηλίκο

$$V \otimes W = V \oplus W / R$$

όπου R είναι ο δ. υπόχωρος που παράγεται από τα στοιχεία

(α) $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$

(β) $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$

(γ) $((\lambda v), w) - \lambda(v, w)$

(δ) $(v, \lambda w) - \lambda(v, w)$

Έτσι ισχύει ότι

(i) $(v_1+v_2)\otimes w = v_1\otimes w + v_2\otimes w$

(ii) $v\otimes(w_1+w_2) = v\otimes w_1 + v\otimes w_2$

(iii) $v\otimes(\lambda w) = (\lambda v)\otimes w = \lambda(v\otimes w)$

Παρατηρήσεις:

(α) $\dim V\otimes W = \dim V\cdot\dim W$

(β) αν $V=W \Rightarrow V\otimes W = -(W\otimes V)$

- Αν έχω (E_1, e_1), (E_2, e_2) ορίζω:

$(E_1\otimes E_2,\ e_1\otimes e_2)$ όπου

$(e_1\otimes e_2(g))(x_1\otimes x_2) :=$

$= e_1(g)(x_1)\otimes e_2(g)(x_2).$

Ορίζεται εσωτερικό γινόμενο

$\langle x_1 \oplus x_2 \mid y_1 \oplus y_2 \rangle$

$\langle x_1 \mid y_1 \rangle_{E_1} + \langle x_2 \mid y_2 \rangle$

και παίρνουμε την πλήρωση $E_1 \oplus E_2$

Πρόταση.

(E, ρ) unitary και $F \subseteq E$ κλειστός. ρ-αναλλοίωτος υπόχωρος. Τότε $F^\perp$ είναι επίσης κλειστός και ρ-αναλλοίωτος και οι ορθογώνιες προβολές $P_F, P_{F^\perp}$ μετατίθενται με την ρ.

απόδειξη $F^\perp$ κλειστός $\Rightarrow$ άμεσο. Από υπόθ. $\rho(g)(x) \in F$ $\forall x \in F$. Έστω $y \in F^\perp$, $x \in F$

$$\langle \rho(g)(y), x \rangle = \langle y, \rho(g^{-1})(x) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \rho(g)(y) \in F^\perp$$

- $\rho(g)(y) = \rho(g)\left(P_F(y) + P_{F^\perp}(y)\right)$

60

$= \rho(g) P_F(y) + \rho(g) P_{F^\perp}(y)$

$\forall y \in E$.

$\square$

<u>Θεώρημα</u> (Λήμμα Schur)

Έστω G τ.ο. και (E_1, ρ_1), (E_2, ρ_2) ανάγωγες unitary αναπαραστάσεις της G

Αν $T : E_1 \to E_2$ intertwiner $\Rightarrow$ $T = 0$ ή T ισομορφισμός και μοναδικός ως προς πολλ/μο με σταθερά

<u>απόδειξη</u> Χρειάζεται το φασματικό θεώρημα για τελεστές.

$\square$

<u>Πόρισμα</u> Έστω G τ.ο και (E, ρ) unitary αναπ.

Τότε E είναι ανάγωγη

$\Leftrightarrow$ κάθε ενδομορφισμός, intertwiner είναι πολ/σιο της id_E

βαθμωτό

(61) $(\Rightarrow)$

<u>απόδειξη</u>: Αν ρ <u>όχι</u> ανάγωγη, υπάρχει $0 \neq F \subsetneq E$ ρ-αναλλοίωτος κλειστός υπόχωρος, όπου $F^{\perp}$ επίσης ρ-αναλλοίωτος

$\Rightarrow P_F$ intertwiner αλλά <u>όχι</u> βαθμωτή της id

$(\Leftarrow)$ αν (E,ρ) ανάγωγη έπεται από το λήμμα του Schur.

unitary. □

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε ανάγωγη αναπ. αβελιανής ομάδας είναι 1-διάστατη.

<u>απόδειξη</u>: Έστω (E,ρ) unitary ανάγωγη αναπ. της G.

Έστω $g \in G \Rightarrow$

$$\rho(g)\rho(x) = \rho(x)\circ\rho(g)$$

$\forall x \in G$. Άρα $\rho(g) = \lambda\, id$

62

Άρα κάθε υπόχωρος του E είναι G-αναλλοίωτος

$\Rightarrow \dim E = 1$.

$\square$

Θεώρημα: Κάθε αναπαράσταση συμπαγούς ομάδας είναι unitarizable

απόδειξη

Έστω G συμπαγής και (E, ρ) αναπαράσταση, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εσωτερικό γιν. στο E.

Για κάθε $x, y \in E$ ορίζουμε

$$\langle x | y \rangle' = \int_G \langle \rho(g) x | \rho(g) y \rangle \, dg$$

όπου dg το μέτρο Haar στη G. Η $\langle \cdot | \cdot \rangle'$ ορίζει πράγματι εσωτερικό γιν. αφού για $x \in E$

$$\langle x | x \rangle' = 0 \Rightarrow \underbrace{\langle \rho(g) x | \rho(g) x \rangle}_{=0}$$

(65)

(από προηγ. θεώρημα για αναλλοίωτα μέτρα)

$\Rightarrow \langle P(g)x \mid e(g)x \rangle = 0$

$g = e$

$\forall g \in G \Rightarrow \langle x \mid x \rangle = 0$

$\Rightarrow x = 0.$

Επίσης

$\langle P(g)x \mid e(g)y \rangle' =$

$$= \int_G \langle P(u) e(g) x \mid e(u) e(g) y \rangle dg$$

$$= \int_G \langle e(ug)(x) \mid e(ug) y \rangle dg$$

$$= \int_G \langle e(u)(x) \mid e(u)(y) \rangle dg = \langle x \mid y \rangle'$$

λr μέτρο Haar δεξιά αναλλοίωτο

$\Rightarrow e(g)$ unitary για $\langle \mid \rangle'$

Όμως, η ρ παραμένει συνεχής;

Φαίνει δείχνοντας ότι οι επαγόμενες νόρμες από α,ψ, α,ψ' είναι ισοδύναμες

⇒ ρ συνεχείς και οι αντίστοι-χες αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες.

□

<u>Πόρισμα</u> Κάθε πεπερ. αναπαράσταση μιας συμπαγούς G είναι completely reducible.