Μάθημα 11ο. 

**Ορσ.** Ένας μορφισμός ομάδων Lie $G, G'$ είναι ένας ομομορφ. ομάδων $\varphi : G \to G'$, η οποία είναι διαφορίσιμη.

**Θεώρημα:** Έστω $f : G \to G'$ μορφ. ομάδων Lie και $g, g'$ οι άλγεβρες Lie των $G, G'$ αντ.

(α) η απεικόνιση $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(\exp t(x)) \in G'$ για $x \in g$ είναι 1-παραμετρική υποομάδα της $G'$

(β) Έστω $\varphi(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp tx)$

$\Rightarrow f(\exp tx) = \exp(t\,\varphi(x)), \ \forall x \in g.$

(γ) η $\varphi : g \to g'$, $x \mapsto \varphi(x)$ είναι μορφισμός αλγεβρών Lie.

**απόδειξη.** (α) αρκεί νδο.

$f^{\exp}(t+s)x = f(\exp(tx))\, f(\exp(sx)).$

$$\varphi(\exp(t+s)X) = \varphi(\exp tX \cdot \exp sX)$$ ②

$$\overset{\varphi}{=} \varphi(\exp(tX)) \cdot \varphi(\exp(sX)).$$

ομομ.

Προφανώς το απ. είναι διαφορίσιμη ως σύνθεση τέτοιων.

(β) το ζητούμενο είναι άμεσο από προηγούμενη πρόταση.

(γ). ο $\varphi$ είναι γραμμική

Έστω $X, Y \in \mathfrak{g}$ και $s \in \mathbb{R}$.

$$\cdot\ \varphi(sX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi \exp(t(sX)) \underset{\text{μεταβλ.}}{\overset{\text{αλλαγή}}{=}}$$

$$= s \frac{d}{du}\Big|_{u=0} \varphi \exp(uX) = s\,\varphi(X)$$

$$\cdot\ \varphi(X+Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi \exp(t(X+Y))$$

$$\cdot\ \varphi \exp t(X+Y) = \varphi\left(\lim_{k\to\infty}\left(\exp\frac{tX}{k}\exp\frac{tY}{k}\right)^k\right)$$

$$\overset{\varphi\ \text{συν.}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(\varphi \exp\left(\frac{tX}{k}\right) \cdot \varphi \exp\left(\frac{tY}{k}\right)\right)^k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\exp \frac{t\,\varphi(X)}{k} \cdot \exp \frac{t\,\varphi(Y)}{k}\right]^k$$ ③

$$= \exp t\left(\varphi(X) + \varphi(Y)\right)$$

άρα παραγωγίζοντας στο $t=0$ παίρνουμε ότι $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$.

• Ισχύει Lie: Θέλουμε νδο

$$\varphi[X,Y] = [\varphi(X), \varphi(Y)]$$

Παρατήρηση:

$$\varphi(gXg^{-1}) = f(g)\,\varphi(X)\left(f(g)\right)^{-1}$$

Πράγματι,

$$\varphi(gXg^{-1}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\,\exp\left(t(gXg^{-1})\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(g\exp(tX)g^{-1}\right)$$

$$= f(g)\,\varphi(X)\left(f(g)\right)^{-1}$$ και

εφαρμόζοντας για $g = \exp(tY)$ και παραγωγίζοντας στο 0 έχουμε το ζητούμενο

<u>Ορσ.</u>: Ο μορφισμός Lie που ορίσθηκε στο προηγούμενο θεώρημα:

$$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}', \; X \mapsto \varphi(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(tX))$$

καλείται <u>παράγωγος</u> (ή <u>διαφορικό</u>) της $f$ και συμβ. με $D(f)$ δηλ.

$$D(f)(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(tX)).$$

<u>Παράγωγος μιας αναπ. ομάδων Lie</u>

<u>Ορσ.</u>: Μια <u>αναπαράσταση</u> μιας ομάδας Lie $G$ είναι ένας μορφισμός Lie $e : G \to GL(E)$, όπου $E$ είναι ένας $\mathbb{C}$ δ.χ. με $\dim_{\mathbb{C}} E < \infty$.

<u>Παράγωγος αναπαράστασης</u>

$D_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ με

$$D(e)(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e(\exp(tX))$$

Όπως είναι σαφές από την προηγούμενη πρόταση:

$$e\left(\exp(tx)\right) = \exp\Big(t \underbrace{\varphi(x)}_{D(e)(x)}\Big).$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(E, e)$ μια αναπ. μιας ομάδας Lie $G$.

(α) Αν $F \leq E$ $e$-αναλλοίωτος $\Rightarrow$ $F \leq E$ είναι $D(e)$-αναλλοίωτος

( ως προς την αναπαράσταση: $D(e): \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ Lie αλγεβρών )

(β) $D(e)$ ανάγωγη $\to$ $e$ ανάγωγη.

(γ) Αν $(E, \langle , \rangle)$ πεπερ. διάστασης χώρος Hilbert και $(E, e)$ unitary αναπ. της $G$, τότε $D(e)$ είναι αντιερμιτιανή.

(δ) Έστω $(E_1, e_1), (E_2, e_2)$ αναπ. της $G$. Αν $e_1 \sim e_2 \Rightarrow D(e_1) \sim D(e_2)$.

$\circledast$ Τα αντίστροφα αληθεύουν αν $G$ είναι συνεκτική.

απόδειξη: Έστω $X \in \mathfrak{g}$ και $v \in I$

$\Rightarrow e\Big(\exp(t X)\Big)(v) \in F$.

$\Rightarrow D(e)(X)(v) \in F$.

(β) Άμεσο από (α).

(γ). Αφού $(E, e)$ είναι unitary.

$\Rightarrow$ για κάθε $X \in \mathfrak{g}$ ισχύει $\forall u, v \in E$

$\langle e(\exp(tX)(u)), e(\exp(tX)(v)) \rangle = \langle u, v \rangle$

Παραγωγίζοντας στο $t=0$

$\langle D(e)(X)(u), v \rangle + \langle u, D(e)(X)(v) \rangle = 0$

που καθιστά τις $(E, D(e))$ αντι-Ερ-

μιτιανή.

(δ). Έστω $\tau: E_1 \to E_2$ τ.ω.

$\forall g \in G:$

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tau} & E_2 \\ {\scriptstyle e_1(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_2(g)} \\ E_1 & \xrightarrow{\tau} & E_2 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \tau \circ e_1(g) = e_2(g) \circ \tau$.

$\Rightarrow \tau \circ \rho_1 \exp(tx) = \rho_2(\exp(tx)) \circ \tau$ (*)

Παραγωγίζοντας στο 0:

$$\tau \circ D(\rho_1)(X) = D(\rho_2)(X) \circ \tau$$

□

## Adjoint Αναπαράσταση.

Έστω $G$ Lie group και $\mathfrak{g}$ η αντ. Lie άλγεβρα. Για κάθε $g \in G$ παράγεται η απ. συζυγίας:

$c_g : G \to G$, $c_g(h) = ghg^{-1}$ η οποία είναι μορφ. ομάδων Lie.

<u>Ορσ.</u> Το διαφορικό

$D(c_g) : \mathfrak{g} = T_I G \to \mathfrak{g} = T_I(G)$

καλείται <u>προσαρτημένη δράση</u> του $g$ και συμβ. με $Ad_g$

<u>Παρατήρηση:</u> $\forall g, g' \in G \Rightarrow$

$c_g \circ c_{g'} = c_{gg'}$, άρα από ιδιότητες διαφορικού $Ad_g \circ Ad_{g'} = Ad_{gg'}$

$\Rightarrow$ η $Ad: G \to GL(g)$ είναι μορφισμός ομάδων· η $Ad$ αναπαράσταση της $G$ (Lie ομάδων)

<u>Ορσ.</u>: Η αναπαράσταση $Ad: G \to GL(g)$ καλείται <u>adjoint αναπαράσταση</u> της $G$.

<u>Παρατήρηση</u>: Από την $Ad: G \to GL(g)$ Lie αλγ επάγεται η αναπαράσταση Lie αλγεβρών: $ad := g \to gl(g)$ η οποία

$$\overset{\shortparallel}{D}(Ad)$$

καλείται <u>adjoint αναπαράσταση</u> της Lie άλγεβρας $g$.

Από το προηγούμενο θεώρ. ισχύει ότι: $Ad_{\exp(tx)} = \exp(t\, ad(x))$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $G \leq GL(n, \mathbb{R})$ γρ. ομάδα Lie, $A \in G$ και $X, Y \in g$.

(α) $Ad_A(X) = AXA^{-1}$.

(β) $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$.

(γ) $\mathrm{ad}_{[X,Y]} = [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]$

απόδειξη:

(α) $\mathrm{Ad}_A(X) = D(C_A)(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} C_A(\exp(tX))$

$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A\exp(tX)A^{-1}$

$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp t(AXA^{-1}) = AXA^{-1}$

(β). $\mathrm{ad}_X(Y) = D(\mathrm{Ad})(X)(Y)$

$= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}\,\exp(tX)\right)(Y)$

$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(tX)}(Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)\,Y\exp(-tX)$

$= [X, Y]$