Μάθημα 12

Οι $su(2)$ και $so(3)$

(α) Η άλγεβρα Lie της $SU(2)$

$$su(2) = \left\{ X \in gl(2,\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} X + X^* = 0 \\ tr(X) = 0 \end{array} \right\}.$$

οι 2×2 αντιερμιτιανοί με $tr(X) = 0$

είναι επίσης $\mathbb{R}$-δ.χ. με μια βάση

($\dim_{\mathbb{R}} su(2) = 3$) να είναι

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad [\xi_k, \xi_l] = \xi_m$$

όπου (k,l,m) κυκλική μετάθεση

των $(1,2,3)$

Στη φυσική χρησιμοποιούνται οι

πίνακες "Pauli" που είναι οι

ερμιτιανοί $(A = A^*)$

$$\sigma_1 = -2i\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = 2i\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = -2i\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ και

$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\sigma_m$. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθούν οι πίνακες:

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = -i\xi_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = i\xi_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = -i\xi_3$$

με $[\tilde{\sigma}_k, \tilde{\sigma}_l] = i\tilde{\sigma}_m$

Σχόλιο: Η $\{I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ είναι μια βάση των 2×2 ερμιτιανών πινάκων. $\mathbb{R}$. Παριστάνουν παρατηρήσιμες στην κλασσική μηχανική, δηλ. παρατηρήσιμες στον χώρο Hilbert $\mathbb{C}^2$.

Άλλοι πίνακες:

$S_k = i\xi_k \longrightarrow [S_k, S_l] = iS_m$.

Ειδικότερα, $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-$

$$\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_1 + i\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_- = \mathcal{J}_1 - i\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2 = i\xi_1 \pm \xi_2 =$$

$$= -\tilde{\sigma}_1 \pm i\tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\left(-\sigma_1 \pm i\sigma_2\right)$$

Οι $\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-$ ικανοποιούν τη σχέση

$$[\mathcal{J}_+, \mathcal{J}_-] = 2\mathcal{J}_3, \quad [\mathcal{J}_3, \mathcal{J}_\pm] = \pm\mathcal{J}_\pm$$

Complexification (μιγαδοποίηση)

Ορσ.: Έστω V ένας $\mathbb{R}$-δ.χ. με $\dim V < \infty$. Η μιγαδοποίηση του V είναι $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, δηλ.

$$V^{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \times V)/W$$

όπου W ο υπόχωρος που παράγεται από τις σχέσεις:

- $(\lambda_1 + \lambda_2, v) - (\lambda_1, v) - (\lambda_2, v)$
- $(\lambda, v_1 + v_2) - (\lambda, v_1) - (\lambda, v_2)$

$(\kappa\lambda, v) = \kappa(\lambda, v)$, $(\lambda, \kappa v) = \kappa(\lambda, v)$ ④

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{C}$, $v_1, v_2, v \in V$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

<u>Σημείωση</u>: Ο $V^{\mathbb{C}}$ γίνεται $\mathbb{C}$-δχ.

ως εξής: $\mu(\lambda \otimes v) := (\mu\lambda) \otimes v$.

Τώρα, αν $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$\lambda \otimes v = \lambda(1 \otimes v)$, άρα αν $\{v_1, \dots, v_n\}$

βάση του V πάνω από το $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\{1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n\}$ βάση <u>του $\mathbb{C}$-δχ.</u>

$V^{\mathbb{C}}$.

<u>Παράδειγμα</u>: $V = \mathbb{C}$ με $\{1, i\}$

βάση πάνω από το $\mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ έχει βάση $\{1 \otimes 1, 1 \otimes i\}$ ως

$\mathbb{C}$-δχ.

<u>Προσοχή</u>: $i(1 \otimes 1) = i \otimes 1 \neq 1 \otimes i$

Έστω $\mathfrak{g}$ μια $\mathbb{R}$-άλγεβρα Lie.
Η μιγαδοποίηση της $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$
είναι μια $\mathbb{C}$-άλγεβρα Lie με αγκύλη Lie:

$$[\lambda \otimes v, \mu \otimes w] = (\lambda\mu) \otimes [v, w]$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $v, w \in \mathfrak{g}$.

Αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια βάση της $\mathfrak{g}$

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_{ij}^k}_{\text{δομικές σταθ.}} e_k$$

$$\Rightarrow [1 \otimes e_i, 1 \otimes e_j] = 1 \otimes [e_i, e_j]$$

$$= 1 \otimes \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k (1 \otimes e_k)$$

<u>Λύση</u>: Μια βάση της $su(2)$ είναι η $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\tau_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ ως $\mathbb{R}$-δ.χ.

$\Rightarrow \{1 \otimes \tau_1, 1 \otimes \tau_2, 1 \otimes \tau_3\}$

μια βάση της $(SU(2))^{\mathbb{C}}$.

όπου αφού $[\tau_k, \tau_l] = 2\tau_m$

$\Rightarrow [1 \otimes \tau_k, 1 \otimes \tau_l] = 2(1 \otimes \tau_m)$

Τώρα, $SL(2,\mathbb{C}) = \{x \in gl(2,\mathbb{C}) \mid Tr(x) = 0\}$

άρα μια $\mathbb{C}$-βάση του είναι η

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} SL(2,\mathbb{C}) = 3$, άρα $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ είναι επίσης βάση. Ορίζουμε την $\tau_i \mapsto 1 \otimes \tau_i$, η οποία από τα προηγούμενο είναι είναι ισομορφισμός $\mathbb{C}$-αλγεβρών.

<u>Ερμηνεία των βάσεων</u>

Άλλη μια βάση της $SU(2)$ είναι η $I = \tau_1$, $J = \tau_2$, $K = \tau_3$, όπου

$I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$, $IJ = K = -JI$

$JK = I = -KJ$, $IK = -J = KI$

Επίσης $[I, J] = 2K$, $[J, K] = 2I$,
$[K, I] = 2J$.

Οι $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, $\{I, J, K\}$ είναι βάσεις της $SU(2)$ ενώ οι $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\{J_1, J_2, J_3\}$ βάσεις της $i\,SU(2)$.

<u>Quarternions</u>:

Έστω $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (ως $\mathbb{R}$-δχ) και ορίζουμε τη διγραμμική απ.
$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $(a,b)\cdot(c,d) := (ac - \bar{b}d, \bar{a}d + cb)$
$a, b, c, d \in \mathbb{C}$. και ορίζουμε με αυτόν τον τρόπο πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{H}$. Με αυτό το τρόπο $\mathbb{H}$ αποκτά δομή 4-διάστατης $\mathbb{R}$-άλγεβρας με βάση $\{i, j, k, 1\}$
$\mathbb{1} = (1,0)$, $i = (i,0)$, $j = (0,1)$, $k = (0,-i)$
τ.ω $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$
$ik = -j = ki$

$\mathbb{H}$ είναι μια άλγεβρα Lie με (8)

$[i,j]=2k,\ [j,k]=2i,\ [k,i]=2j$

και $[1,i]=[1,j]=[1,k]=0$.

• Αν $\mathbb{H}_0 = \langle i,j,k \rangle_{\mathbb{R}} \leq \mathbb{H}$ τότε

η $I \mapsto i,\ J \mapsto j,\ K \mapsto k$ είναι

ισομορφισμός Lie Αλγεβρών (από $\mathbb{H}_0,\ \mathfrak{su}(2)$).

<u>Βάσεις της $\mathfrak{so}(3)$</u>

Έστω $\mathfrak{so}(3) = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(3,\mathbb{R}) \mid X + X^t = 0 \right\}$.

$\mathbb{R}$-δχ με μια βάση του να είναι

η $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[u_k, u_l] = [u_m]$

$\underbrace{}_{\text{σχέση Lie}}$

Παρατηρήσεις:

(α) $\left(SO(3), [\cdot,\cdot]\right) \overset{\text{ισ. Lie αλγ}}{\cong} \left(\mathbb{R}^3, \cdot\times\cdot\right)$

(β) $SU(2) \cong SO(3)$ μέσω $\xi_i \mapsto u_i$

Άρα $\left(SO(3)\right)^{\mathbb{C}} \cong \left(SU(2)\right)^{\mathbb{C}} \cong SL(2,\mathbb{C})$

• $\boxed{\text{Η ομάδα } SO(3)}$

$A \in SO(3) \Leftrightarrow A\cdot A^t = A^t A = I_3$ και $\det(A) = 1$.

Για κάθε $A \in SO(3)$, υπάρχει $P \in O(3)$ τ.ω

$$PAP^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

κανονική μορφή.

$\Rightarrow B$ έχει ιδιοτιμή 1 και ιδιοδιάν. e_3. $\Rightarrow Be_3 = e_3 \Rightarrow P^t B e_3 = P^t e_3$

$\Rightarrow A(P^t e_3) = P^t e_3$. Αν $\vec{\alpha} = P^t e_3$

$\Rightarrow A\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ με $\|\vec{\alpha}\| = 1$ (αφού P είναι ορθογώνιος)

• Άρα κάθε $A \in SO(3)$ είναι στροφή γύρω από το $\vec{a}$ κατά γωνία θ και καθορίζεται πλήρως από αυτά. Η στροφή αυτή θα συμβ.

$$\underline{Rot(\vec{a}, \theta)}$$

<u>Πρόταση</u>: Ο τύπος της $Rot(\vec{a}, \theta): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι

$$Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{x}) = \vec{x} + (1-\cos\theta)\,\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \sin\theta\,(\vec{a} \times \vec{x})$$

<u>απόδειξη</u>: <u>1η περίπτωση</u>

$$\vec{x} \perp \vec{a} \to Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{x}) = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,(\vec{a} \times \vec{x})$$

<u>2η περίπτωση</u> Γενικά, αν $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ γράφεται: $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{a}$

$$\to Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{x}) = Rot(\vec{a}, \theta)(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})$$

$$= \lambda Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{a}) + \mu\, Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{b})$$

$$= \lambda \vec{a} + \lambda\mu\left(\cos\theta\, \vec{b} + \sin\theta\, \vec{a} \times \vec{b}\right) \quad (11)$$

υπενθύμιση:

$$\left(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}\right) \quad (*)$$

$$= \lambda \vec{a} + \cos\theta\left(\vec{x} - \lambda \vec{a}\right) + \sin\theta\, \vec{a} \times (\vec{x} - \lambda \vec{a}) \quad (1)$$

(*) διότι $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \lambda$ $\Rightarrow$

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = \lambda \vec{a} - \vec{x} \quad (2)$$

$$\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} Rot(\vec{a}, \theta)(\vec{x}) = \vec{x} + (1 - \cos\theta)\, \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) + \sin\theta\, (\vec{a} \times \vec{x})$$

$\square$