Μάθημα 13ο

Πρόταση: Δύο στροφές της $SO(3)$ είναι συζυγείς αν-ν έχουν ίσες ή αντίθετες γωνίες.

απόδειξη: Προφανώς, τα ζεύγη $(\vec{\alpha}, t)$, $(\vec{\alpha}', t')$ ορίζουν την ίδια στροφή αν-ν $(\vec{\alpha}, t) = (\vec{\alpha}', t')$ ή

$$(\vec{\alpha}, t) = (-\vec{\alpha}', -t)$$

$(\Leftarrow)$ Έστω $g \in SO(3)$

Ισχυρισμός: $\boxed{g \, Rot(\vec{\alpha}, \vartheta) \, g^{-1} = Rot(g\vec{\alpha}, t)}$

Πράγματι, $g \, Rot(\vec{\alpha}, t) g^{-1}$ αφήνει αναλλοίωτο το $g\vec{\alpha}$, άρα έχουμε το ζητ.

Συνεπώς, $Rot(\vec{\alpha}', t')$ συζυγής της $Rot(\vec{\alpha}, t)$ αν-ν $Rot(\vec{\alpha}', t') = Rot(g\vec{\alpha}, t)$

$\Rightarrow$ $t = t'$ ή $t = -t'$

($\Leftarrow$) Εστω $\underbrace{Rot(\vec{a}, t)}_{A}$, $\underbrace{Rot(\vec{a}', t)}_{A'}$ ②

$\rightarrow \exists P, P' \in O(3)$ τ.ω

$$PAP^t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P'A'P'^t \Leftarrow 6$$

$$A' = (P')^{-1} P A P^t ((P')^t)^{-1}$$
$$= (P')^t P A P^t P'$$

□

Πόρισμα: Προκύπτει από την αποδ. ότι

$\forall g \in SO(3)$:

$$g\, Rot(\vec{a}, t) g^{-1} = Rot(g\vec{a}, t)$$

Πρόταση: Η $\exp: so(3) \rightarrow SO(3)$

είναι επί.

απόδειξη Εστω $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε τα στοιχεία της $SO(3)$

που είναι στροφές γύρω από τα e_1, e_2, e_3

κατά γωνία t, $Rot(\vec{e}_i, t)$, $i = 1, 2, 3$.

Τα $Rot(\vec{e_i}, t)$ είναι 1-παρ. υποομ. της $SO(3)$ με $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Rot(\vec{e_i}, t) = h_i$

$\Rightarrow Rot(\vec{e_i}, t) = \exp(t h_i), \quad i = 1, 2, 3.$

Είδαμε ότι κάθε $A \in SO(3)$ έχει την κανονική μορφή:

$$PAP^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Για κάθε $Rot(\vec{a}, t)$ υπάρχει $g \in SO(3)$: $Rot(\vec{a}, t) = g^{-1} Rot(\vec{e_3}, t) g$

$= Rot(g\vec{e_3}, t) = g^{-1} \exp(t h_3) g$

$= \exp\left[t\left(g^{-1} h_3 g\right)\right]$ $\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Η exp <u>δεν</u> είναι 1-1 <u>π.χ.</u> $\exp\left((t + 2k\pi) h_j\right) = \exp(t h_j)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Ταύτιση της ~~so(3)~~ $SO(3)$ με το $\mathbb{R}^3$

Έστω $\mathcal{M}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow SO(3)$

$e_i \longmapsto \eta_i$ με $\mathcal{M}(e_k)(\vec{x})$

$$= \eta_k(\vec{x}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Rot(\vec{e}_k, t)(\vec{x})$$

$= \vec{e}_k \times \vec{x}$ γραμμικός ισομορφισμός

$$\Rightarrow \mathcal{M}(\vec{a})(\vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{x})$$

- Επίσης, για κάθε $g \in SO(3)$

$$\mathcal{M}_{g\vec{a}}(\vec{x}) = g\vec{a} \times \vec{x} = g(\vec{a} \times g^{-1}\vec{x})$$

$$= g\,\mathcal{M}_a(\vec{x})\,g^{-1} \Rightarrow \mathcal{M}_{g\vec{a}} = g\,\mathcal{M}_{\vec{a}}\,g^{-1}$$

$$= Ad_g \mathcal{M}_{\vec{a}}, \quad \forall g \in SO(3)$$

Πρόταση: Για κάθε $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{a}\| = 1$

$$\Rightarrow \exp(t\,\mathcal{M}_{\vec{a}}) = Rot(\vec{a}, t)$$

απόδειξη

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Rot(\vec{a}, t)(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$$

από τον τύπο της Rot.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\, \mathfrak{M}\vec{a})\binom{x}{y} = \mathfrak{M}\vec{a}\binom{x}{y}$$

και οι δύο σπ. ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες. $\square$

Η ομάδα Lie $SU(2)$

$$SU(2) = \left\{ A \in GL(2,\mathbb{C}) \,\middle|\, \begin{array}{l} AA^* = A^*A = I_2 \\ \det(A) = 1 \end{array} \right\}$$

(α) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot A^* = I_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$|\alpha|^2 + |b|^2 = 1$, $\alpha\bar{c} + b\bar{d} = 0$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$

$\det(A) = 1 \rightarrow \alpha d - bc = 1 \rightarrow$

$\alpha\bar{c}d - b|c|^2 = \bar{c} \Rightarrow -b\bar{d}d - b|c|^2 = \bar{c}$

$\bar{c} = -b \rightarrow c = -\bar{b}$. Όμοια, $d = \bar{\alpha}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ -\bar{b} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

$\to SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{C}, \; |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$

(β) $SU(2)$ είναι αμφιδιαφορική (ως διαφορική πολλαπλότητα) με την $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, άρα $SU(2)$ είναι συμπαγής συνεκτική και απλά συνεκτική.

(γ) κάθε $A \in U(2)$ είναι διαγωνίσιμος (ως κανονικός) με ιδιοτιμές μέτρου 1. Άρα, για κάθε $A \in SU(2)$ υπάρχει $g \in SU(2)$:

$$A = g \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} g^{-1}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι πίνακες $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ είναι συζυγείς μέσω του $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$

Πρόταση: Η $\exp: \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ (*) είναι επί.

απόδειξη: Έστω

$$A = g \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} g^{-1}, \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \exp(tK), \ K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \exp\left(t\left(gKg^{-1}\right)\right) = \exp\left(t \, Ad_g(K)\right). \quad \square$$

Ταύτιση της $\mathfrak{su}(2)$ με το $\mathbb{R}^3$

Θεωρούμε τον γραμμικό ισομορφισμό

$$e_1 \mapsto I = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \mapsto K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\chi}: \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$$

αν $\vec{a} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}$ (8)

$$X_{\vec{a}} = x_1 I + x_2 J + x_3 K = \begin{pmatrix} x_3 i & ix_1 - x_2 \\ ix_1 + x_2 & -x_3 i \end{pmatrix}$$

$\to \det X_{\vec{a}} = \|\vec{a}\|^2$, $(X_{\vec{a}})^2 = -\det(X_a) I_2$

Λήμμα: Κάθε $X \in SU(2)$ ικανοποιεί την σχέση: $X^2 = -\det(X) I_2$.

Πρόταση: Για κάθε $X \in SU(2)$ με $\det(X) = 1$ ισχύει ότι

$$\exp(tX) = \cos t\, I_2 + \sin t\, X$$

απόδειξη: Αφού

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\cos t\, I_2 + \sin t\, X) = X$$

αρκεί νδο. η καμπύλη

$\gamma(t) = \cos t\, I_2 + \sin t\, X$ είναι

1-παραμετρική υποομάδα της $GL(2, \mathbb{C})$

Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t)\cdot\gamma(s) = \cos t \cos(s) I_2 + \left(\cos(s)\sin t + \sin(s)\cos t\right) X + \sin t \sin s\, X^2$$

$$\overset{X^2 = -I_2}{=\!=} \cos(t+s) I_2 + \sin(t+s) X$$

Δηλαδή

$$= \gamma(t+s).$$ □

<u>Πόρισμα</u>: Από το επί της exp. και αφού $\det g \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} g^{-1} = 1$, $\forall g \in SU(2) \to$ κάθε $A \in SU(2)$ γράφεται στη μορφή.

$$A = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 I + \alpha_2 J + \alpha_3 K$$

όπου $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\|\vec{\alpha}\| = 1$

Άρα η $SU(2)$ ταυτίζεται με την ομάδα $\{ \alpha \in \mathbb{H} \mid \|\vec{\alpha}\| = 1 \}$

Αππ. των αναπαραστάσεων με νόρμα (10)

!1.

<u>Προβολή της $SU(2)$ στην $SO(3)$</u>

Έστω η αναπαρ.

$$Ad : SU(2) \to GL(\mathfrak{su}(2))$$

με $Ad_g(X) = gXg^{-1}$.

Έχουμε ταυτίσει την $\mathfrak{su}(2)$ με το $\mathbb{R}^3$ μέσω της $a \mapsto X_{\vec{a}}$. Άρα για $g \in G$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{su}(2) \arrow[r, "Ad_g"] & \mathfrak{su}(2) \arrow[d, "x^{-1}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[u, "x"] \arrow[r] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

Άρα ορίζεται $\varphi(g) = x^{-1} Ad_g\, x \in GL(3,\mathbb{R})$

άρα μπορούμε να ταυτίζουμε την Ad με την αναπαράσταση $\varphi : SU(2) \to GL(3,\mathbb{R})$

Αν $g \in SU(2)$ και $v \in \mathbb{R}^3$

$\| \varphi(g)(v) \|^2 = \det\left(Ad_g X_v\right) =$ $\det\left(X_v\right) = \|v\|^2 \Rightarrow \varphi(g)$ ισομετρία για κάθε $g \in G$.

$\Rightarrow \varphi: SU(2) \to O(3)$. Θδο.

$\varphi: SU(2) \to SO(3)$. Αρχικά

$\varphi\left(SU(2)\right)$ είναι συνεκτικό και

$I_3 \in \varphi\left(SU(2)\right)$ και αφού $SO(3)$

είναι η συνεκτική συνιστώσα

της $O(3)$ που περιέχει $I_3 \Rightarrow$

$\varphi\left(SU(2)\right) \subseteq SO(3)$.