Μάθημα 15

Λαπλασιανή: $\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} \text{ με}$$

$$\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi}.$$

Επίσης, ορίζεται δράση στις $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ της $SO(3)$:

$$\forall g \in SO(3): (g \cdot f)(x) := f(g^{-1}x)$$

Χώροι Αρμονικών Πολυωνύμων

Ορσ. Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C} \in C^2$.

Η f θα λέγεται <u>αρμονική</u> αν $\Delta_{\mathbb{R}^3}(f) = 0$.

$\overline{\mathbb{P}}^l = \{$ ομογενή πολ. βαθμού l στο $\mathbb{C}[x,y,z]\}$.

<u>Ερώτημα:</u> Ποια είναι η διάσταση του P^l;

Αρχικά τα ομογενή πολυώνυμα βαθμού l στις δύο μεταβλητές καθορίζονται <u>πλήρως</u> από τα $l+1$ πολυώνυμα της μορφής $x_1^a x_2^b$ $a+b=l$. Άρα, τα $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ είναι βάση του $\mathbb{C}$-δ.χ. P^l με $a_1+a_2+a_3$ με

$$\dim_{\mathbb{C}} P^l = 1+2+3+\dots+(l+1) = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

<u>Γενικότερα</u>, αποδεικνύεται ότι αν $P^l = \{F \in \mathbb{C}[x_1, \dots x_n] \mid F_l \text{ ομ. βαθμού}\}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} P^l = \binom{n-1+l}{l}.$$

Συμβ : Συμβολίζουμε με

H^{ℓ} τα αρμονικά πολυώνυμα του P^{ℓ}, δηλ. $H^{(\ell)} = \{F \in P^{(\ell)} \mid \Delta F = 0\} \subseteq P^{(\ell)}$.

Λήμμα: $\dim H^{(\ell)} = 2\ell + 1$.

απόδειξη: Έστω $\Delta : P^{(\ell)} \to P^{(\ell-2)}$, η οποία είναι γραμμική. Ισχύει $\ker \Delta = H^{(\ell)}$

$\Rightarrow \dim H^{(\ell)} = \dim P^{(\ell)} - \dim \operatorname{Im} \Delta$

αν.δο. Δ είναι επί.

- Έστω $d_3 \in \mathbb{N}$. Θ.δ.ο. $x_3^{d_3} \in \operatorname{Im} \Delta$

$$\Delta\left(x_3^{d_3+2}\right) = (d_3+2)(d_3+1)\, x_3^{d_3}$$

Όμοια $x_1 x_3^{d_3}, x_2 x_3^{d_3} \in \operatorname{Im} \Delta$.

Επίσης,

$$\Delta\left(x_1^{d_1}x_2^{d_2}x_3^{d_3}\right) = d_1(d_1-1)\,x_1^{d_1-2}x_2^{d_2}x_3^{d_3}$$

$$+\, d_2(d_2-1)\,x_1^{d_1}x_2^{d_2-2}x_3^{d_3} +$$

$$+\, d_3(d_3-1)\,x_1^{d_1}x_2^{d_2}x_3^{d_3-2},$$ για κάθε

d_1, d_2, d_3.

Η παραπάνω σχέση μας δίνει

ότι αν $x_1^{d_1}\cdot x_2^{d_2}\cdot x_3^{d_3} \in \operatorname{Im}\Delta$

για $d_1+d_2 = d-2 \to x_1^{d_1} x_2^{d_2}\cdot x_3^{d_3} \in \operatorname{Im}\Delta$

για $d_1+d_2 = d$.

Από τα προηγούμενα αφού δείξαμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $d=0,1$, με επαγωγή έχουμε το ζητ.

Δηλ. Δ είναι επί. $\square$

<u>Ορσ.</u>: $\widetilde{H}^{(\ell)} = \left\{ P|_{S^2} \,\middle|\, P \in H^{(\ell)} \right\}$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $H^{(\ell)} \to \tilde{H}^{(\ell)}$, $P \longmapsto P|_{S^2}$

είναι γραμμικός ισομορφισμός

<u>Αποδ.</u> Το επί είναι άμεσο. Τώρα

Εστω $Y \in \tilde{H}^{(\ell)} \Rightarrow Y = P|_{S^2}$, για

κάποιο $P \in H^{(\ell)}$. Για $\vec{x} \neq 0$:

$$P(\vec{x}) = P\left(\|\vec{x}\| \frac{x}{\|\vec{x}\|}\right) = \|\vec{x}\|^{\ell} Y\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right).$$

$\square$.

<u>Θεώρημα</u>: $$\boxed{L^2(S^2) = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \tilde{H}^{(\ell)}.}$$

<u>Σημείωση</u>: Αν H μιγαδικός χώρος Hilbert γράφουμε

$$H = \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_i \quad \text{αν}$$

(α) $H_i \leq H$ κλειστός, $\forall i \in \mathbb{N}$.

(β) $H_i \perp H_j$, $\forall i \neq j$

(γ) $\forall x \in H$: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, $x_i \in H_i$.

⑥ Αν τα (α), (β) ισχύουν, τότε (γ)

$\Leftarrow$ το $H \supseteq \langle \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \rangle$ πυκνό

<u>απόδειξη</u> (α) Το (α) ισχύει

αφού έχουμε δείξει ότι

$\dim \tilde{H}^{(l)} = \dim H^{(l)} = 2l+1 < \infty$,

$\forall\, l \in \mathbb{N}$.

(β) Όπως θα αποδείξουμε

και στη συνέχεια, $\forall\, Y \in \tilde{H}^{(l)}$:

$\Delta_{S^2}(Y) = -l(l+1)Y$, άρα είναι

ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Δ_{S^2}

Αφού η Λαπλασιανή είναι

self-joint, $\forall\, Y, Z$ στο $\tilde{H}^{(l)}, \tilde{H}^{(k)}$

αντ. $k \neq l$:

$\langle \Delta_{S^2}(Y), Z \rangle = \langle Y, \Delta_{S^2}(Z) \rangle$

όπου από την τελευταία σχέση (7)
έχουμε το ζητούμενο

(γ) Κάθε πολυώνυμο P περιορισμένο στην S^2 είναι της μορφ.

$$P = P_1 + \dots + P_k \in \langle \bigcup_{l=1}^{\infty} \tilde{H}^{(l)} \rangle$$

Τώρα, αν $x \neq y \in S^2$ υπάρχει P τ.ω. $P(x) \neq P(y)$. Άρα $\mathbb{C}[x,y,z]|_{S^2}$ διαχωρίζει τα σημεία της S^2. Από το Θεώρημα Stone-Weierstrass. Ο $\mathbb{C}[x,y,z]|_{S^2}$ είναι πυκνό υποσύνολο το $\mathcal{C}(S^2)$ με την sup-νόρμα.

Τώρα, $\mathcal{C}(S^2) \subseteq \mathcal{L}^2(S^2)$ πυκνό με την $\mathcal{L}^2$ νόρμα. Αφού

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|\cdot\|_\infty .$$

$$\Rightarrow \langle \bigcup_{l=1}^{\infty} \tilde{H}^{(l)} \rangle \subseteq \mathcal{L}^2(S^2) \text{ πυκνό}$$

(8) Αναπαραστάσεις της $SO(3)$ στην $H^{(\ell)}$.

Έστω $P \in P^{(\ell)}$ και $g \in SO(3)$.

Θεωρώ το πολυώνυμο $\sigma(g)(P)$

όπου $\sigma(g)P(x,y,z) = P\left(g^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \in P^{(\ell)}$

Άρα έχουμε δράση $P^{(\ell)} \times SO(3) \to P^{(\ell)}$

Παράδειγμα: Έστω

$P_\ell(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + i x_2)^\ell \in P^{(\ell)}$ — 6.

$P_\ell \in H(\ell)$. Πράγματι:

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} P_\ell = \frac{\partial^2 P_\ell}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P_\ell}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P_\ell}{\partial x_3^2} =$$

$$= \ell(\ell-1)(x_1 + i x_2)^{\ell-2} - \ell(\ell-1)(x_1 + i x_2)^{\ell-2} = 0.$$

Έστω $g_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$

⑨

$\Rightarrow \varphi(g_\vartheta) \in SO(3)$. Όμως,

$$g_\vartheta = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix} = \exp\left(\vartheta \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right)$$

$$= \exp(2\vartheta \xi_3), \text{ όπου } \xi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(g_\vartheta) = \varphi\left(\exp(2\vartheta \xi_3)\right) =$$

$$= Rot(\vec{e}_3, 2\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(2\vartheta) & -\sin(2\vartheta) & 0 \\ \sin(2\vartheta) & \cos(2\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ισχυρισμός: Το P_l είναι ιδιοσυνάρτηση του πίνακα $\varphi(g_\vartheta)$, όπου P_l το πολ. που ορίσθηκε στο προηγούμενο παράδειγμα με ιδιοτιμή $\exp(-i2l\vartheta)$

απόδ. (ισχυρισμού)

$$\varphi(g_\vartheta) \cdot P_l(x_1, x_2, x_3)$$

$$= P_l\left((\varphi(g_\vartheta))^{-1}(x_1, x_2, x_3)^t\right)$$

Αφού $\varphi(g_\theta) \in SO(3) \Rightarrow$

$$\left(\varphi(g_\theta)\right)^{-1} = \varphi(g_\theta)^t = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\varphi(g_\theta)\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta)x_1 + \sin(2\theta)x_2 \\ -\sin(2\theta)x_1 + \cos(2\theta)x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$P_l\Big(\cos(2\theta)x_1 + \sin(2\theta)x_2 + i\left(-\sin(2\theta)x_1 + \cos(2\theta)x_2\right)\Big) = \exp(-i2\theta l)\, P_l(x_1, x_2, x_3)$$

◁

<u>Πρόταση</u>: Ο υπόχωρος $H^{(l)} \leq P^{(l)}$ είναι αναλλοίωτος, από την δράση της $SO(3)$ στον $P^{(l)}$.

<u>απόδειξη</u>: Θα δείξουμε κάτι γενικότερο. Αν $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ και $g \in SO(3) \Rightarrow \Delta(f \circ g) = (\Delta f)\circ g$.

Συνεπώς, αν φ είναι ένα αρμονικό πολυώνυμο $\Rightarrow$ έχουμε το ζητ.

Έστω $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $g \in SO(3)$

με $g = A = (A_{ij})$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial(\varphi \circ g)(\vec{x})}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(\vec{y}) \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(\vec{x})}_{\text{άθροισμα για } j = 1-3}.$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial y^j}(\vec{y}) A_{ji}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi \circ g)(\vec{x}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} A_{ji} A_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^j \partial y^k}(\vec{y}).$$

$\underline{\underline{A \cdot A^t = I_3}}$
$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_j^2}(\vec{y}) = \Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi)(\underbrace{g\vec{x}}_{\vec{y}}).$$

$$\Rightarrow \Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi \circ g) = \Delta_{\mathbb{R}^3}(\varphi) \circ g.$$

<u>Πόρισμα</u>: Περιορίζοντας την σ στην $\mathcal{H}^{(\ell)}$ παίρνουμε μια αναπαράστασης της $SO(3)$ $(\mathcal{H}^{(\ell)}, \sigma^{(\ell)})$ διάστασης $2\ell+1$.

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε $Y \in \tilde{H}^{(\ell)}$ είναι ιδιοσυνάρτηση της Δ_{S^2}.

<u>απόδειξη</u>: Έστω $P|_{S^2} = Y$ για $P \in H^{(\ell)}$. Δείξαμε ότι

$$P(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{\neq 0}) = \|\vec{x}\|^{\ell} \, Y\left(\frac{x_1, x_2, x_3}{\|\vec{x}\|}\right)$$

Σε σφαιρικές συν.

$$P\left(r, \xi = (\theta, \varphi)\right) = r^{\ell} \, Y(\xi).$$

Έχουμε

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}.$$

$$\Delta_{\mathbb{R}^3}(P)(r,\xi) = 0 \iff$$

(13)

$$\frac{\partial^2 (r^l Y(\xi))}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial r^l Y(\xi)}{\partial r} + \frac{\Delta_{S^2} r^l Y(\xi)}{r^2} = 0$$

$$\iff r^{l-2}\left[\left(l(l-1) + 2l\right)Y(\xi) + \Delta_{S^2} Y(\xi)\right] = 0$$

$r \neq 0$

$$\iff \boxed{\Delta_{S^2}(Y) = -l(l+1)\,Y}$$