Μάθημα 16:

- $\mathcal{P}^{(\ell)}$ ομογενή πολ. βαθμού ℓ
- $\mathcal{H}^{(\ell)} \subset \mathcal{P}^{(\ell)}$ αρμονικά ομ. πολ.
- $\widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)} = \{ P|_{S^2} \mid P \in \mathcal{H}^{(\ell)} \}$ με.

$\dim \widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)} = \dim \mathcal{H}^{(\ell)} = 2\ell + 1$.

- $L^2(S^2) = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)}$ και

για κάθε: $\Delta_{S^2}(Y) = -(\ell+1)\ell Y$

$Y \in \widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)}$

Πρόταση: Για κάθε $\ell \geq 2$

$$\mathcal{P}^{(\ell)} = \mathcal{H}^{(\ell)} \oplus r^2 \mathcal{P}^{(\ell-2)}$$

απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$\dim \mathcal{P}(\ell) = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} \text{ και}$$

$$\dim \mathcal{H}^{(\ell)} = 2\ell + 1$$

②

$$\to \dim P^{(l)} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} = \dim H^{(l)} + \dim r^2 P^{(l-2)}$$

$$\underbrace{}_{\frac{l(l-1)}{2}}$$

Άρα, αυδο. $H^{(l)} \cap r^2 P^{(l-2)} = 0$.

<u>Ταυτότητα του Euler.</u>

$$x_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial P}{\partial x_3} = l P$$

για κάθε $P \in P^{(l)}$.

$$\to \Delta\left(r^{2k} P\right) = 2k(2l+2k+1) r^{2k-2} P + r^{2k} \Delta P.$$

με επαγωγή, $\forall k \geq 0$. ⊛

Για $P \in H^{(l)}$, έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ω. $P = r^{2k} a$ με $a \in P^{(l-2k)}$.

$$\circledast \to 0 = 2k(2l+2k+1) r^{2k-2} a + r^{2k} \Delta a.$$

3

$$\rightarrow \Lambda a \frac{r^{2(k+1)}}{2k(2k-2l-1)} = r^{2k} a = P$$

το οποίο αντιτίθεται στην αρχική επιλογή του k. αν $k \neq 0$.

$\rightarrow k = 0.$ ◻.

$$P^{(l)} = H^{(l)} \oplus r^2 P^{(l-2)} =$$

$$= H^{(l)} \oplus r^2 H^{(l-2)} \oplus r^4 P^{(l-4)} \oplus \cdots$$

~~όπου ο τελευταίος όρος~~:

Τα υπόλοιπα που διδαχθήκαν είναι εκτός ύλης και πραγματεύονται ευρέσεων βάσης του $\tilde{H}^{(l)}$.