Μαθήματα 17·18

Αναπαραστάσεις της SU(2)

Έστω $A \in U(n)$ δηλ.

$A A^* = A^* A = I_n$ άρα κανονικός,

άρα διαγωνίσιμος και μάλιστα

$PAP^{-1} = diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, $P \in U(n)$

Τώρα, $\forall i$: $Av = \lambda_i v$ ①, $v \in V_A(\lambda_i)$

$\Rightarrow v^* A^* = \bar{\lambda}_i v^*$ ②

$\Rightarrow v^* A^* A v = \bar{\lambda}_i v^* (\lambda_i v)$ $\Leftarrow$

$|\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i = e^{i\theta} \in U(1)$

Άρα κάθε διαγώνιος $D \in U(n)$

είναι της μορφής $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$

Μέσω της $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \mapsto$

$diag(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ ταυτίζουμε

$\boxed{U(1)^n \subseteq U(n)}$

Άρα, κάθε δύο $A, B \in U(n)$ (2)

είναι συζυγείς αν $A \sim B \sim D \in U(1)^n$

δηλ. έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές

Όμοια κάθε $P \in S(U(n))$ διαγωνο-

ποιείται και $P \sim D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$

όμως $\det P = 1 \Rightarrow$

$e^{i\theta_n} = e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1})}$ άρα

$$P \sim D = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{-i(\theta_1 + \dots + \theta_n)} \end{pmatrix}$$

Άρα ~~...~~ γενικότερα μπορούμε

να θεωρήσουμε $U(1)^{n-1} \leq SU(n)$

και όμοια $A, B \in SU(n)$ συζυγείς

αν έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(Παρατηρήστε ότι κάθε $P \in SU(n)$

όμοιος με διαγώνιο $P \, P \, P^{-1} = D$

$P \in U(n)$. Για $\tilde{P} = P \, (\det(P))^{1/n}$

η συζυγία διατηρείται στην SU(n) (3)

Ας περιοριστούμε τώρα στην $SU(2)$. Αν $\tau \in SU(2)$ με τ έχει ιδιοτιμές $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ άρα

$$\tau \sim U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Άρα, $SU(2)$ χωρίζεται σε κλάσεις συζυγίας

$$C(\theta) = \{ \tau \in SU(2) \mid \tau \sim U(\theta) \}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi$. Έστω ρ η αναπαράσταση της $SU(2)$ στο $\mathbb{C}^2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \tau \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αφού κάθε $\tau = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ -\bar{b} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |b|^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \left(\alpha x + b y, \bar{\alpha} y - \bar{b} x \right).$$

Επεκτείνουμε τη δράση αυτή σε πολυώνυμα ως εξής:

$2j(2j-1)$ $\qquad$ $2j(0-j)$ (6)

$$P \longmapsto P\left(\tau\binom{x}{y}\right) =$$

$$= P\left(\alpha x + by,\ \bar{\alpha} y - \bar{b} x\right).$$

Ορσ. Έστω $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ συμβ. με $V(j) = P^{(2j)} = \langle x^{2j}, x^{2j-1}y, \dots, y^{2j}\rangle$ τον δ.χ. των ομογενών πολυωνύμων βαθμού $2j$ και $D_j : SU(2) \to GL(V_j)$ όπου αν $\tau \in SU(2)$, $P \in V(j)$

$$\tau \cdot P(x,y) = P\left(\tau\binom{x}{y}\right).$$

Σκοπός: νδο. $(V(j), D^j)$ είναι οι μοναδικές ανάγωγες αναπ. της $SU(2)$.

Παράδειγμα Έστω $T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$

$$T\binom{x}{y} = (iy, ix) \mapsto$$

$$\tau(x^3) = (iy)^3 = -iy^3$$

$$\tau(x^2y) = (iy)^2(ix) = -iy^2x$$ (5)

$$\tau(xy^2) = -ix^2y\,, \quad \tau(y^3) = -ix^3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Πρόταση</u>: Ο χαρακτήρας της D_j δίνεται από τον τύπο: αν $\tau \in SU(2)$ με ιδιοτιμές $e^{\pm i\theta}$

$$\Rightarrow \chi_j(\tau) = e^{2ij\theta} + e^{2i(j-1)\theta} + \dots + e^{-2ji\theta}$$

<u>απόδειξη</u> $\quad \tau \sim U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_j(\tau) = \chi_j(U(\theta)).$$

$$U(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(e^{i\theta}x,\ e^{-i\theta}y\right) \Rightarrow$$

$$U(\theta)\left(x^k y^{2j-k}\right) = e^{i\theta k}x^k e^{-i\theta(2j-k)} y^{2j-k}$$

$$= e^{2i\theta(-j+k)}\, x^k y^{2j-k}$$

$$\Rightarrow \chi_j(\tau) = e^{2i\theta(2j-j)} + \dots + e^{2i\theta(0-j)}$$ (6)

$$= e^{2i\theta j} + \dots + e^{-2i\theta j}$$

<u>Πρόταση</u>: Για κάθε $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$.

D_j είναι ~~...~~ ανάγωγη αναπαράσταση διάστασης $2j+1$.

<u>απόδειξη</u>: Θυμίζουμε ότι οι μοναδικές ανάγωγες αναπ. της $U(1)$ είναι οι $\Pi_n : U(1) \to U(1)$, $\Pi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$

Δείξαμε πριν ότι $U(1) \leq SU(2)$ ταυτίζοντας $e^{i\theta} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

Περιορίζουμε την D_j στη $U(1)$.

$\Rightarrow$ για κάθε $x^k y^{2j-k}$ δείξαμε ότι $e^{i\theta}(x^k y^{2j-k}) =: U(\theta)(x^k y^{2j-k})$

$$= e^{2i\theta(k-j)} x^k y^{2j-k}$$

άρα ισχύει ότι

$$(D_j)|_{U(1)} = \Pi_{-2j} \oplus \Pi_{-2j+2} \oplus \cdots \oplus \Pi_{2j}$$

Συνεπώς: $V(j) = \langle x^{2j} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle y^{2j} \rangle$

όπου $\langle x^{k} y^{2j-k} \rangle$ απλά $U(1)$-πρ.

όπου μάλιστα αυτή η γραφή είναι μοναδική, ως προς αναδιάταξη, σε απλά $U(1)$-πρότυπα ⊛

Έστω τώρα $V(j) = U \oplus W$ δύο $SU(2)$-πρότυπα (δηλ. δύο αναπαραστάσεις της $SU(2)$)

Από ⊛ $\langle x^{2j} \rangle$ θα περιέχεται σε κάποιον από τους δύο προσθετέους, π.χ. $x^{2j} \in U \Rightarrow \forall \tau \in SU(2)$

$\tau(x^{2j}) \in U$. Για παράδειγμα αν

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (x+y)^{2j} = \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^{k} y^{2j-k} \in U$$

(8) Έτσι αποδεικνύεται ότι $x^k y^{2j-k} \in \mathcal{U}$ $\forall\, k=0,\dots,2j \Rightarrow \mathcal{U}=V(j)$ άρα $V(j)$ ανάγωγη αναπ.

$\square$

<u>Πρόταση</u>: $(D_j, V(j))$ είναι οι μοναδικές ανάγωγες αναπ. της $SU(2)$.

<u>απόδειξη</u>: Έστω α ανάγωγη αναπ. της $SU(2)$. Υποθέτουμε ότι $\langle \chi_\alpha, \chi_j \rangle = 0$, $\forall j$. Περιορίζουμε την α στην $U(1)$, άρα $\alpha_{U(1)} = \sum_j n_j \pi_j$

$$\Rightarrow \chi_\alpha(\mathcal{U}(\theta)) = \sum_j n_j \chi_{\pi_j}(\mathcal{U}(\theta))$$

$$= \sum_j n_j e^{ij\theta}$$

<u>Παρατήρηση</u> $\mathcal{U}(\theta) \sim \mathcal{U}(-\theta)$

$\Rightarrow n_j = n_{-j}$

$$\Rightarrow \chi_\alpha(U(\theta)) = \sum_j c_j \chi_j(U(\theta)). \quad (9)$$

$$\Rightarrow \chi_\alpha(\tau) = \sum_j c_j \chi_j(\tau), \ \forall \tau \in SU(2)$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. □

<u>Αναπαραστάσεις της $SO(3)$</u>

Θυμίζουμε το double cover:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to SU(2) \xrightarrow{\varphi} SO(3) \to 1$$

Άρα $SO(3) \cong SU(2) / \mathbb{Z}_2 = \{\pm I_2\}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε

$$\begin{tikzcd}
\tau: SO(3) \arrow[r] & GL(V) \\
SU(2)/\mathbb{Z}_2 \arrow[u, "\varphi \cong"] \arrow[ur, "\text{ορίζεται αναπ.}"'] & \\
SU(2) \arrow[u, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

Αντιστροφα αν $\rho : SU(2) \to GL(V)$ (10)

με $\ker(\rho) \supseteq \mathbb{Z}_2 = \{\pm I\} \Rightarrow$

ορίζεται αναπαράσταση

$$SO(3) \longrightarrow \frac{SU(2)}{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\tilde{\rho}} GL(V).$$

Άρα οι ανάγωγες αναπ. της SO(3)

είναι ακριβώς αυτές που είναι ανά-

γωγες αναπ. της SU(2) (ρ, V)

και $\{\pm I\} \subseteq \ker\rho$. Άρα αναζητ-

ούμε τα $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ τ.ω. $\mathbb{Z}_2 \subseteq \ker D_j$

$$-I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x, -y \end{pmatrix} \Rightarrow (-I)(x^k y^{2j-k})$$

$$= (-1)^{2j} x^k y^{2j-k} = x^k y^{2j-k} \Leftrightarrow 2j \in 2\mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow j \in \mathbb{N}$.

Άρα οι ανάγωγες αναπ. της SO(3)

είναι οι $D_0, D_1, D_2, \ldots$