① Πρόταση   Άλγεβρα Ι   60. M

G πεπερ.

$K \leq G$, $p \mid |K|$, p πρώτος.

Αν $P \in Syl_p(G) \Rightarrow \exists\, g \in G : gPg^{-1} \cap K \in Syl_p(K)$

απόδ. $p \mid |K| \Rightarrow \exists\, P' \in Syl_p(K)$.

$\Rightarrow P'$ p-υποομάδα της G

$\Rightarrow P'$ περιέχεται σε μια Sylow p-υποομ.

$\Rightarrow \exists\, g \in G : P' \leq gPg^{-1}$,

$\Rightarrow \exists\, g \in G : P' \leq (gPg^{-1}) \cap K$,

• $(gPg^{-1}) \cap K$ p-υποομάδα της K.

$\Rightarrow P' = (gPg^{-1}) \cap K \in Syl_p(K)$ □.

Πρόταση: Αν επιπλέον.

• $K \trianglelefteq G \Rightarrow$ (α) $K \cap P \in Syl_p(K)$

(β) $PK/K \in Syl_p(G/K)$

απόδ: από προηγούμενη προτ.

$\exists\, g \in G : (gPg^{-1}) \cap K \in Syl_p(K)$.

(α) Αν δείξουμε ότι

$$(gPg^{-1}) \cap K = g(P \cap K)g^{-1}$$

$$\Rightarrow |gPg^{-1} \cap K| = |g(P \cap K)g^{-1}|$$

$$= |P \cap K| \Rightarrow P \cap K \in Syl_p(K).$$

Τώρα, $x \in gPg^{-1} \cap K \Leftrightarrow$

$\exists y \in P : x = gyg^{-1} = gzg^{-1}$

$\exists z \in K = \Rightarrow y = z \Rightarrow x \in g(P \cap K)g^{-1}$ (1)

$= gKg^{-1}$

$\boxed{K \trianglelefteq G}$

Αντίστροφα, $x \in g(P \cap K)g^{-1}$.

$\Rightarrow \exists y \in P \cap K : x = gyg^{-1} \in gPg^{-1} \cap gKg^{-1}$

$K \trianglelefteq G$

$\Rightarrow x = gyg^{-1} \in (gPg^{-1}) \cap K$.

και έχουμε δείξει το (α)

(β) Αρχικά $PK \leq G$, αφού

$PK = KP$ ($\Rightarrow K$ κανονική).

Γνωρί $A\nu$ $|G| = p^n \cdot m$ $((p,m) = 1)$

και $|K| = p^k \cdot \lambda$ $((p,\lambda) = 1)$.

$\Rightarrow |G/K| = p^{n-k} \cdot d$. $(p \nmid d)$.

Από θεώρημα ισομορφισμών. ③

- $PK/K \cong P/K\cap P$ με.

- $|P/K\cap P| = p^{n-k} \Rightarrow PK/K \in Syl_p(G/K)$

$P \in Syl_p(G)$, $K \cap P \in Syl_p(K)$

<u>Πρόταση</u>: Κάθε Sylow p-υποομ. της G είναι της μορφής PK/K όπου $P \in Syl_p(G)$.

<u>Αποδ</u>: Έστω $\mathcal{U} \in Syl_p(G/K)$.

Από το <u>θεώρημα αντιστοιχείας</u>

$\exists\ N \geq K : \mathcal{U} = N/K \in Syl_p(G/K)$.

αν $G = p^n \cdot m$, $K = p^k \cdot l$ $\Rightarrow |G/K| = p^{n-k} \cdot \xi$.

$\Rightarrow |N/K| = p^{n-k} \Rightarrow \boxed{|N| = p^n \cdot \mu}$

$\Rightarrow Syl_p(N) \subseteq Syl_p(G)$.

- Αν $P \in Syl_p(N) \Rightarrow$ ① $PK/K \in Syl_p(G/K)$.

② $PK/K \subseteq N/K = \mathcal{U}$

$\Rightarrow PK/K = N/K = \mathcal{U}$. ΙΙ

Ευθέα Γινόμενα.

Ορσ. G ομάδα, $H_i \leq G$, $i \in I$.

Η G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των H_i αν:

① $H_i \trianglelefteq G$, $\forall i \in I$.

② $G = \langle H_i \mid i \in I \rangle$.

③ $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{1\}$.

Ισοδύναμα,

(α) στοιχεία διαφορετικών H_i μετατίθενται

(β) $\forall g \in G$, g γράφεται μοναδικά ως γινόμενο στοιχείων των H_i

Ορσ. Έστω $\{G_i\}_{i \in I}$ ομάδες.

Θεωρώ το ε καρτεσιανό γινόμενο

$\prod_{i \in I} G_i$ και το υποσύνολο.

$G = \{ (g_i)_{i \in I} \mid g_i \neq 1_{G_i}$ για πεπερ. πλήθος $i \}$.

(3) το G γίνεται ομάδα με πράξεις κατά συντ., δηλ.

α) $(g_i)_i \cdot (x_i)_i = (g_i x_i)_{i \in I}$

β) $1_G = (1_{G_i})_i$ (γ) $[(g_i)_i]^{-1} = (g_i^{-1})_i$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\forall i \in I$: $\overline{G_i}$ είναι η εικόνα της κανονικής εμφύτευσης: $G_i \hookrightarrow G$,

$g_i \mapsto (g_j)_{j \in I}$, $\begin{pmatrix} g_j = g_i, & j = i \\ g_j = id_{G_j}, & j \neq i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ (α) $G = \langle \overline{G_i} : i \in I \rangle$

(β) $\overline{G_i} \trianglelefteq G$, $\forall i \in I$ (γ) $\overline{G_i} \cap \langle \overline{G_j} : j \neq i \rangle = \{1\}$.

$\Rightarrow$ G είναι το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των $\{G_i\}_{i \in I}$.

<u>Συμβ.</u> $\bigtimes_{i \in I} G_i$ ή $\bigoplus_{i \in I} G_i$ όταν έχουμε προσθετικές ομάδες.

Ελεύθερες Αβελιανές Ομάδες

Αν G είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, τότε

$$G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus T$$

T πεπερ. ομάδα.

Η G είναι ελεύθερη αν $T = \{1\}$

Η G είναι ελεύθερη αν είναι ευθύ άθροισμα αντιτύπων του $\mathbb{Z}$.

Ορσ: Μια ομάδα F (αβελιανή) λέγεται ελεύθερη αβελιανή διάστασης n, αν $\exists\, g_1, \ldots, g_n \in F$ με $\langle g_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ και $F = \langle g_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle g_n \rangle$

$$\cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$$

Δηλ. αν είναι το ευθύ άθροισμα n το πλήθος άπειρων κυκλικών ομάδων.

$\to \{g_1, \ldots, g_n\}$ λέγεται βάση της F.

Π.χ. (περίπου) Αν $2F=\{2g \mid g\in G\} \oplus$.
$2F \trianglelefteq F$ και $F/2F = \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$.
$\Rightarrow |F/2F| = 2^n$, άρα $\dim_{\mathbb{Z}_2} F/2F = n$.

Γενικό Λέμε ότι η (αβελ.) ομάδα F είναι ελεύθερη επί των $\{g_i\}_{i\in I}$, αν κάθε $\langle g_i\rangle \cong \mathbb{Z}$ και

$$F \cong \bigoplus_{i\in I} \langle g_i \rangle.$$