Άλγεβρα ΙΙ:

Πόρισμα: Κάθε πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης αβελιανής πεπερασμένης διάστασης.

αποδ: Έστω $\{g_1, \dots, g_k\}$ σύνολο γεννητόρων της G.

$\forall i = 1 \dots k$ θεωρούμε άπειρη κυκλική και $\mathbb{Z}_i = \langle x_i \rangle$ και την ελεύθ. αβελ. $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_i$

Από την καθολική ιδιότητα ελεύθερων αβελιανών: η $x_i \mapsto g_i$ επεκτείνεται σε $\varphi : F \to G$ επιμορφ.

□

Θεώρημα: Έστω $\pi : G \to H$ επιμορφ. αβελιανών ομάδων.

Αν $\varphi : F \to H$ ομομορφ, F ελεύθερη αβελιανή

$\Rightarrow \exists\ \psi : F \to G$ τ.ω. $\varphi = \pi \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi"] & H \\
& F \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

απόδ: $\{x_i\}_{i\in I}$ βάση

$\overset{\pi \text{ επί}}{\Longrightarrow} \exists\, \varphi(x_i) \in H \Longrightarrow \forall i \in I : \exists\, g_i$

$\varphi(x_i) = \pi(g_i)$. Ορίζουμε

$\psi : \{x_i\}_i \to G,\quad x_i \mapsto g_i$

$\overset{\text{καθολική}}{\Longrightarrow} \exists\, \psi : F \to G$ τ.ω.

ιδιότητα ελεύθερων αβελιανών

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] & H \\ & F \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, "\psi"] \arrow[u, phantom, shift right=3, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

□

Λήμμα: Έστω • F ελεύθερη αβελ.
• G αβελιανή • $\pi : G \to F$ επιμορφ.
$\Longrightarrow G = \ker\pi \oplus H,\ H \cong F$.

απόδ:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads, "\pi"] & F \\ & F \arrow[u, "id"'] \arrow[ul, "\exists \varphi"] \end{tikzcd}$$

από την προηγούμενη Πρόταση υπάρχει ομομορφ: $\varphi : F \to G$ τ.ω. $\pi \circ \varphi = id$

$\Longrightarrow \varphi$ 1-1 $\Longrightarrow F \hookrightarrow G$ και $H = \operatorname{im}\varphi \cong F$.

Θ.δ.ο. $G = \ker\pi \oplus H$.

Scanned with CamScanner

(i) $\ker\pi \cap H = \{0\}$. (ii) $G = \ker\pi + H$. ③

↳ άμεσο.

• Έστω $g \in G \Rightarrow \pi(\varphi(\pi(g))) = \pi(g)$

$\Rightarrow \pi(\varphi(\pi(g)) - g) = 0 \Rightarrow$

$g - \varphi(\pi(g)) \in \ker\pi \Rightarrow g \in \ker\pi + H$.

□

<u>Θεώρημα</u>: Έστω F ελεύθερη αβελ. διάστασης n.

• Αν $0 \neq H \leq F \Rightarrow H$ ελεύθερη αβελ. με $\operatorname{rank}(H) \leq n$.

<u>Αποδ</u>. Με επαγωγή επί το n.

<u>Βάση</u>: $n=1 \Rightarrow F \cong \mathbb{Z}$. άπειρη κυκλική

$\Rightarrow$ κάθε υποομ. $\overset{H}{\neq} \{0\}$. είναι άπειρη κυκλική $\Rightarrow H \cong \mathbb{Z}$.

<u>Επαγωγικό βήμα</u>.

Έστω $n > 1 \Rightarrow F = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n-1} \oplus \mathbb{Z}$

$n-1$.
$\shortparallel$
K ελεύθερη αβελιανή

$\Rightarrow$ H ελεύθερη αβελιανή με $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(K) = n-1 < n = \text{rank}(F)$

- Αν $H \not\subseteq K$.

Θεωρώ τον φυσικό επιμορφισμό $\pi: F \to \mathbb{Z}$, $\ker\pi = K$.

Αφού $H \not\subseteq K \Rightarrow \pi(H) \neq \{0\}$ και $\pi(H) \leq \mathbb{Z} \Rightarrow \pi(H) = \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow \pi|_H : H \to \mathbb{Z}$ <u>επιμορφισμός</u>

Λήμμα
$\Rightarrow H = \ker(\pi|_H) \oplus \mathbb{Z}$.

- $\ker(\pi|_H) = H \cap K \leq K$. από ε.υ.
  $\hookrightarrow$ <u>ελεύθερη αβελιανή</u>.
  με $\text{rank}.\left[\ker(\pi|_H)\right] = m \leq n-1$.

$\Rightarrow H = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{m} \oplus \mathbb{Z}$

Άρα H ελεύθερη αβελιανή με $\text{rank}(H) = m+1 \leq n$.

(5)

Πόρισμα:

Αν μια G παράγεται από n. το # στοιχεία $\Rightarrow$ κάθε υποομάδα της μπορεί να παραχθεί από το πολύ n-το πλήθος στοιχεία.

αποδ. $G = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$.

$\Rightarrow \exists\, F$ ελεύθερη αβελ. τ.ω.

$F \longrightarrow G$ επιμορφ. $\longrightarrow G \cong F/K$.

αν $H \leq G \Rightarrow$ (θεωρ. αντ.) $\exists\, M \leq F$, $M \geq K$: $H \cong M/K$.

$M \leq F$, F ελευθ. αβελ. $\Rightarrow$

M ελεύθερη αβελ., rank $M \leq n$

$\Rightarrow M/K$ πεπερ. παραγ. $= \{n_1, \dots, n_r\}$.

$n \geq r \Rightarrow H$ πεπερ. παραγ. από $r \leq n$ στοιχεία.

Scanned with CamScanner

Ασκ $G = \mathbb{Z}^n$. Δείξτε ότι η (5)
G δεν μπορεί να παραχθεί από λιγότερα από n στοιχεία.

αποδ: Ας υποθέσουμε ότι G παράγεται από m στοιχεία.

$\Rightarrow \exists\ \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\pi} G = \mathbb{Z}^n$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^m = \ker\pi \oplus \mathbb{Z}^n$

όπου $\ker\pi = \begin{cases} \{0\} \\ \text{ή} \\ \text{ελεύθερη αβελιανή} \end{cases}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}^m = \mathbb{Z} \oplus \cdots \mathbb{Z} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$

$\Rightarrow m \geq n$.

$\square$

Ασκ: Έστω F ελεύθερη αβελ. πεπερ. τάξεως και $H \leq F$. Τότε F/H πεπερ. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(H) = \operatorname{rank}(F)$.

αποδ: $|F/H| = k \Rightarrow kg \in H,\ \forall g \in G$.

Ορίζουμε $F \to H,\ g \mapsto kg$.

$\Rightarrow F \hookrightarrow H$ (H torsion free).

Scanned with CamScanner

$y = (y_1, \dots, y_n)$

---

⑥ $\Rightarrow \operatorname{rank}(H) = \operatorname{rank}(F)$

($\Leftarrow$) Έστω $\{x_1, \dots, x_n\}$ βάση της.

$F = \langle x_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle x_n \rangle$.

- Αν $H \cap \langle x_i \rangle = \{0\}$, για κάποιο i

$\Rightarrow$ αν $\pi : F \to F / \langle x_i \rangle$ προβολή

$\Rightarrow \pi|_H : H \to F/\langle x_i \rangle$ 1-1.

$\Rightarrow H \hookrightarrow F/\langle x_i \rangle$ ελεύθερο διαστ. $n-1$.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(H) \leq n-1$ Άτοπο.

$\Rightarrow H \cap \langle x_i \rangle \neq \{0\}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow H \cap \langle x_i \rangle = \langle k_i x_i \rangle$, $k_i \neq 0$.

$F \ni g = \sum n_i x_i$, $k = k_1 \dots k_n$.

$\Rightarrow kg = \sum n_i k x_i = \sum n_i (\dots) k_i x_i \in H$

Άρα $\forall g \in F$ έχει πεπερ.

ξω στο F/H.

$\Rightarrow$ η F/H πεπερ. παραγόμενη αβελ.

όπου κάθε στοιχείο έχει πεπερ.

τάξη.

$\Rightarrow F/H$ πεπερασμένη.