Άλγεβρα Ι. (24/10/2022)

Επιλύσιμες Ομάδες.

<u>Ορσ.</u>: Μια ομάδα G λέγεται επιλύσιμη αν έχει κανονική σειρά

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

της οποίας κάθε πηλίκο G_{i+1}/G_i είναι αβελιανή ομάδα.

Μια κανονική σειρά όπως πριν (δηλ κάθε πηλίκο αβελ) λέγεται επιλύσιμη σειρά.

Μια επιλέπτυνση μιας επιλύσιμης σειράς είναι επιλύσιμη σειρά.

Πράγματι, αρκεί να θεωρ $H_i \triangleleft N \triangleleft H_{i+1}$
H_{i+1}/H_i αβελ.

- $N/H_i \leq H_{i+1}/H_i$ υποομ. αβελιανής αβελ.
- $H_{i+1}/N \cong (H_{i+1}/H_i)/(N/H_i)$ ως πηλίκο αβελ.

②

Πχ ① Κάθε αβελιανή είναι επιλύσιμη

② Η S_3 είναι επιλύσιμη, αφού

$1 \trianglelefteq A_3 \trianglelefteq S_3$ και $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ αβελ.

$S_3 / A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ αβελ.

③ Κάθε διεδρική D_n είναι επιλύσιμη:

$1 \trianglelefteq \langle a \rangle \trianglelefteq D_n$

↳ "γεννήτρια" με $o(a) = n$ στροφών

$\langle a \rangle / 1$ αβελ. $D_n / \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ αβελ.

④ S_n για $n > 4$ δεν είναι επιλύσιμη (γιατί;)

(κάθε κανονική A_n της S_n ↙ όχι αβελ)

⑤ Έστω K σώμα και $T_n(K)$

$n\times n$ αντιστρέψιμοι, άνω τριγωνικοί επί του K.

$$T_n(K) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Η ομάδα είναι επιλύσιμη.

Με επαγωγή

<u>$n=1$</u>: $T_n(K) = K^*$ αβελ.

για $n>1$, $\varphi: T_n(K) \to T_{n-1}(K)$

που διαγράφει τελευταία γραμμή + στήλη

επιμορφ. Ομάδων.

$\to T_n(K)/_{\ker\varphi} \cong T_{n-1}(K)$.

↳ επιλύσιμη από Ε.Υ.

$\ker\varphi: A\in T_n(K): A_1 = I_{n-1}$.

Ορίζω $\ker\varphi \xrightarrow{\pi} K^*$

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto a_{nn}$$ επιμορφ.

(4)

$Ker\pi = \{A \in Ker\varphi : ann = 1\}$.

αβελιανή

$\Rightarrow$ Kerφ επιλύσιμη $\Rightarrow$ $T_n(K)$ επιλύσιμη

Ισχύουν τα εξής:

- (Feit-Tompson) Κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη.
- (Burnside) Κάθε ομάδα τάξεως $p^n q^m$, p, q πρώτοι είναι επιλύσιμη

<u>Η παράγωγος σειρά:</u>

Έστω G ομάδα και

$G' = \langle [g,h] \mid g,h \in G \rangle = [G,G]$

η παράγωγος υποομάδα.

$G' \trianglelefteq G$ και G/G' αβελιανή

Επιπλέον αν $H \trianglelefteq G$ με G/H αβελ.

$\Rightarrow G' \leq H$. $\left(G/G' = G_{αβ} \right)$

Ορσ. Η ν-οστή παράγωγος υποομάδα $G^{(n)}$ μιας ομάδας G ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$G^{(0)} = G,\ G^{(1)} = G',\ G^{(2)} = (G')'$$

$$G^{(n+1)} = (G^{(n)})' = [G^{(n)}, G^{(n)}]$$

Είναι άμεσο ότι $G^{(n+1)} \trianglelefteq G^{(n)}$ και ότι $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ αβελιανή.

Η παράγωγος σειρά της G είναι η "σειρά"

$$G^{(0)} = G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G^{(n)} \trianglerighteq \dots$$

Άσκηση: Κάθε όρος της παραγώγου σειράς είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα της G.

$\left(\text{Δηλ. } \varphi\left(G^{(n)}\right) \leq G^{(n)},\ \forall \varphi \in End(G) \right)$

για $n=1$: $\varphi([g,h]) = [\varphi(g), \varphi(h)] \in G'$

$\Rightarrow \varphi(G') \leq G'$

Έστω ότι $\varphi(G^{(n)}) \leq G^{n}$

$\varphi\left(G^{(n+1)}\right) = \varphi\left(\left(G^{(n)}\right)'\right)$

$\leq \left(G^{(n)}\right)' = G^{(n+1)}$

Ιδιαιτέρως, κάθε $G^{(n)}$ είναι χαρακτηριστική (και άρα κανονική) υποομάδα της G.

<u>Π.χ.</u>: για $n \geq 5$: $S_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow S_n' \leq A_n$. Αφού S_n δεν είναι αβελιανή (αβελ.)

$\Rightarrow S_n' \neq 1$ και $S_n' \trianglelefteq A_n$

A_n απλή

$\Rightarrow S_n' = A_n \Rightarrow S_n^{(k)} = A_n$

$n \geq 5$.

Τα πηλίκα της παραγώγου σειράς είναι αβελιανές ομάδες.

Συνεπώς, αν $G^{(k)} = 1$ για κάποιο k

$\Rightarrow G$ είναι επιλύσιμη, αφού η παράγωγος σειρά θα είναι επιλύσιμη σειρά.

Scanned with CamScanner

(7)

Το αντίστροφο ισχύει επίσης.

<u>Θεώρημα</u>: G επιλύσιμη ανν

$G^{(n)} = \{1\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

<u>Απόδ</u>: ($\Leftarrow$) το είδαμε.

($\Rightarrow$). G επιλύσιμη και έστω

$1 \trianglelefteq H_m \trianglelefteq \dots H_1 \trianglelefteq H_0 = G$

Μια επιλύσιμη σειρά της G.

Θ.δ.ο. $G^{(i)} \subseteq H_i$, $\forall i$.

$\Rightarrow$ $G^{(m)} = \{1\}$.

- Επαγωγικά, $i=1$. G/H_1 αβελ.

$\Rightarrow$ $G' \subseteq H_1$ ✓

- Έστω $G^{(i)} \subseteq H^{(i)}$, H_i / H_{i+1} αβελ.

Άρα, $(H_i') \subseteq H_{i+1}$ $\Rightarrow$.

$(G^{(i)})' = G^{(i+1)} \subseteq (H_i)' \subseteq H_{i+1}$.

$\blacksquare$

<u>Ορσ</u>: Αν G επιλύσιμη, τότε ο μικρότερος n για τον οποίο $G^{(n)} = \{1\}$, λέγεται <u>παράγωγο μήκος</u> ή μήκος επιλυσιμότητας

(8)

Έτσι αν $G \neq \{1\}$, τότε παράγωγο μήκος $= 1 \Rightarrow G$ αβελιανή

<u>Πρόταση:</u>

1. Κάθε υποομάδα H μιας επιλύσιμης G είναι επιλύσιμη.

2. Αν G επιλύσιμη και $N \trianglelefteq G \Rightarrow G/N$ επιλύσιμη.

3. Αν $N \trianglelefteq G$ και N, G/N επιλ. $\Rightarrow G$ επιλύσιμη

$\Rightarrow$ Δηλ. κλάση επιλύσιμων είναι κλειστή ως προς υποομ., πηλίκα και επεκτάσεις.

<u>Αποδ.:</u> 1. Εύκολα $H^{(i)} \subseteq G^{(i)}$, $\forall i$

Αφού G επιλύσιμη, $G^{(k)}$ για κάποιο $k \Rightarrow H^{(k)} = 1$, δηλ. H επιλύσιμη.

2. $(G/N)' = [G/N, G/N] = G'N/N$

και επαγωγικά $(G/N)^{(i)} = G^{(i)}N/N$

$\Rightarrow$ G επιλύσιμη $\Rightarrow$ $G^{(k)} = 1$, για κάποιο k

$\Rightarrow$ $(G/N)^{(k)} = G^{(k)}N/N = 1.$

$\Rightarrow$ G/N επιλύσιμη.

$\Leftarrow$ Αφού N, G/N επιλ. $\exists\, m, n$

$(N)^{(m)} = 1$ και $(G/N)^{(n)} = 1.$

Όπως πριν $G^{(n)}N/N$ $\Rightarrow$

$(G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N = 1 \Rightarrow$

$G^{(n)} \leq N \Rightarrow G^{(n+m)} = N^{(m)} = 1.$

$\Rightarrow$ G επιλύσιμη. $\square$