(26/10/2022)

<u>Πόρισμα</u> Κάθε πεπερασμένη p-ομάδα είναι επιλύσιμη.

<u>αποδ</u>: ~~Επ~~ Με επαγωγή στο n, $|G|=p^n$.

<u>Βάση</u> $|G|=p \Rightarrow G$ αβελιανή

<u>Επαγωγικό βήμα</u>: <u>1η περ</u>. $G=Z(G)$

$\Rightarrow G$ <u>αβελιανή</u> $\Rightarrow$ επιλύσιμη.

<u>2η περ</u>. $1 \neq Z(G) \underset{\neq}{\trianglelefteq} G$.

$\Rightarrow |Z(G)|, |G/Z(G)| < p^n \xrightarrow{\text{ε.υ.}} Z(G), G/Z(G)$ <u>επιλύσιμες</u>.

$\Rightarrow G$ <u>επιλύσιμη</u>.

□.

<u>Εφαρμογή</u>: Αν G ομάδα της οποίας η τάξη "έχει" το πολύ τρεις πρώτους. (<u>όχι</u> απαραίτητα διαφορετικούς). $\Rightarrow$

G επιλύσιμη.

<u>αποδ</u>.

- $|G|=p^2 \Rightarrow G$ αβελιανή επιλύσιμη
- $|G|=p \cdot q$, $p<q \Rightarrow G$ όχι απλή $\Rightarrow$ Ιδιαιτέρως περιέχει μοναδική κανονική υποομάδα Q τάξεως q. $Q \cong \mathbb{Z}_q$. $G/Q \cong \mathbb{Z}_p$.

$\Rightarrow G$ επιλύσιμη.

- $|G| = p^3$ επιλύσιμη από πριν.
- Αν $|G| = p^2 q$ ή $p \cdot q \cdot r \Rightarrow G$ όχι απλή. Έστω $1 \neq N \trianglelefteq G$

$\Rightarrow |N| =$ το πολύ δύο πρώτοι

$|G/N| =$ " " " "

$\Rightarrow G/N, N$ επιλύσιμες $\Rightarrow G$ επιλύσιμη

Θεώρημα Κάθε ομάδα τάξεως p^n ή $p^n q$ ή $p^2 q^2$ ή $p \cdot q \cdot r$ όπου p, q, r είναι πρώτοι, είναι επιλύσιμη.

απόδ: Αν $|G| = p^n$ ή $p \cdot q \cdot r$ ✓

Έστω $|G| = p^n \cdot q$, με $p \neq q$.

Με άτοπο. Έστω ότι υπάρχουν επιλύσιμες ομάδες τάξης $p^k q$ και από αυτές επιλέγουμε μία ελάχιστης τάξης, έστω G.

1η περ. G όχι απλή $\Rightarrow \exists N$:

$1 \neq N \trianglelefteq G \Rightarrow G/N, N$ επιλύσιμες

$\Rightarrow G$ επιλύσιμη άτοπο $\boxed{\text{Άτοπο}}$

$\Rightarrow G$ απλή $\Rightarrow n_p = d \Rightarrow$.

- Έστω $P, Q \in Syl_p(G)$ και $|P \cap Q|$ μέγιστη.

τομή

- $P \cap Q = \{1\} \Rightarrow$ κάθε p-Sylow είναι τετριμμένη $\Rightarrow \exists\, d(p^n - 1) = |G| - d$ στοιχεία τάξεως δύναμη p.

$\Rightarrow n_d = 1 \Rightarrow$ υπάρχει μοναδική κανονική Sylow d-υποομ. $\left.\begin{matrix} \\ G \text{ απλή} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{Άτοπο}}$

$\Rightarrow \bullet\ \exists\ P, Q \in Syl_p(G)$, $P \cap G \neq \{1\}$ με μέγιστη τάξη τομής.

- Έστω $N = N_G(P \cap Q)$

$\left.\begin{matrix} \bullet\ P, Q \ p\text{-ομάδες} \\ \bullet\ P \cap Q \underset{\neq}{\triangleleft} P \\ \bullet\ P \cap Q \underset{\neq}{\triangleleft} Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \neq P \underset{\neq}{\triangleleft} \begin{cases} N_P(P \cap Q) \leq N \\ \\ N_Q(P \cap Q) \leq N \end{cases}$

Ισχυρ. περ. N είναι p-ομάδα $\Rightarrow$

$\exists P_1 \in Syl_p(G) : N \subseteq P_1$

$\Rightarrow 1 \neq P \cap Q \underset{\neq}{\triangleleft} N_P(P \cap Q) \cap P_1 \subseteq P_1 \cap P$ $(\Rightarrow P_1 \neq Q)$

$1 \neq P \cap Q \underset{\neq}{\triangleleft} N_Q(P \cap Q) \cap P_1 \subseteq P_1 \cap Q$ $(\Rightarrow P_1 \neq P)$.

Άτοπο, αφού P_i α επιλέχθηκαν να είναι η τομή τους μέγιστης τάξης. (4)

$\Rightarrow d \mid N$

- Έστω $\Lambda \in Syl_d(N) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} P \cap \Lambda = \{1\} \\ |P| = p^n \\ |\Lambda| = d \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = |P \cdot \Lambda| \Rightarrow G = P \cdot \Lambda.$$

Θεωρούμε την κανονική θήκη της τομής $P \cap a$.

$1 \neq \langle\langle P \cap a \rangle\rangle^N = \langle g(P \cap a)g^{-1} \mid g \in G \rangle$

$= \langle g P \cap a g^{-1} \mid g \in P \rangle \; (\subseteq P \neq G)$.

Τελικά ① $1 \neq \langle\langle P \cap a \rangle\rangle^N \trianglelefteq G$ και

② $\langle\langle P \cap a \rangle\rangle^N \neq G \Rightarrow$ Άτοπο αφού G απλή.

$\square$.

- $|G| = p^2 d^2$, $p \neq d$.

1η Αν G όχι απλή $\Rightarrow \exists\, 1 \neq N \trianglelefteq G$

δηλ. G/N, N επιλύσιμες $\Rightarrow G$ επιλ.

2η περ.: G απλή $\Rightarrow n_p, n_d > 1$.

Scanned with CamScanner

(5)

$n_q \mid p^2$, $n_q \equiv 1 \bmod q \Rightarrow q \mid n_q - 1$.

$n_q \neq 1$

$\Rightarrow p < q < n_q \Rightarrow n_q = p^2$.

(α') $\forall P, Q \in Syl_q(G)$, $P \neq Q$ ε.

$\Rightarrow P \cap Q = \{1\} \Rightarrow \exists\ p^2(q^2-1)$ στοιχεία τάξης δύναμη q.

$= p^2q^2 - p^2$ στοιχεία

$\Rightarrow n_p = 1$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>.

(β) $\exists P, Q \in Syl_q(G)$ με $P \neq Q$ και

$P \cap Q \neq \{1\}$.

Έστω $N = N_G(P \cap Q)$. P, Q αβελιανές

$P \cap Q \trianglelefteq P$

$\Rightarrow P, Q \leq N \Rightarrow P, Q \overset{\triangleleft}{\neq} N \left(\begin{matrix} |P| = |Q| \\ P \neq Q \end{matrix}\right)$

$P \cap Q \trianglelefteq Q$

$\Rightarrow q^2 \mid N$ και $|N| > q^2$.

$\Rightarrow |N| = pq^2$ ή $|N| = p^2q^2$

(i) $|N| = p^2q^2 \Rightarrow G = N$ και $\left.\begin{matrix} 1 \neq P \cap Q \trianglelefteq N = G \\ G \text{ απλή} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ ΑΤΟΠΟ

(ii) $|N| = p \cdot q^2$ και $[G:N] = p$. Από $G \curvearrowright G/N$

επάγεται $\varphi: G \hookrightarrow S_p \Rightarrow p \cdot q^2 \mid p!$, $q > p$.

<u>ΑΤΟΠΟ</u>

Π.χ. $|A_5| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, αλλά A_5 όχι επιλύσιμη

(απλή + όχι αβελιανή).

Αν $\varphi : G \to H$ επιμορφ. αβελιανών ομ. και G ελεύθερη αβελιανή π.τ.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(H) + \operatorname{rank}(\ker\varphi)$

* Αν Γ πεπερ. παραγόμενη αβελιανή ομάδα $\Rightarrow \Gamma = \mathbb{Z}^n \oplus T$ όπου T πεπερ. ομάδα. Ορίζουμε $\boxed{\operatorname{rank}(\Gamma) = \operatorname{rank}(\mathbb{Z}^n) = n}$

$H \cong G/\ker\varphi$ π.π. αβελιανή

Αποδ: $H = H_1 \oplus T$, T πεπερ., $|T| = n$

και $H_1 \cong \mathbb{Z}^n \Rightarrow \operatorname{rank}(H) = \operatorname{rank}(H_1)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\pi\circ\varphi"'] & H \arrow[r, "\pi"] & H_1 \end{tikzcd} \Rightarrow G = H_1 \oplus \ker(\pi\circ\varphi)$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(G) = \operatorname{rank}(H_1) + \operatorname{rank}[\ker(\pi\circ\varphi)]$ (*)

$= \operatorname{rank}(H) + \operatorname{rank}[\ker(\pi\circ\varphi)]$

Άρα αν δ.ο. $\operatorname{rank}[\ker(\pi\circ\varphi)] = \operatorname{rank}(\ker\varphi)$

- $\ker\varphi$, $\ker(\pi\circ\varphi)$ ελεύθερες ($\leq G$).

Από προηγούμενη πρόταση αν.δ.ο. $\textcircled{\varphi}$

$\ker(\pi \circ \varphi) / \ker(\varphi)$ πεπερασμένη.

- $g \in \ker(\pi \circ \varphi) \Leftrightarrow \pi(\varphi(g)) = 1 \Rightarrow$

$\varphi(g) \in \ker \pi \Rightarrow n \cdot \varphi(g) = \varphi(ng) = 1$.

$\Rightarrow ng \in \ker(\varphi) \Rightarrow$ κάθε στοιχείο

του $\ker(\pi \circ \varphi) / \ker(\varphi)$ έχει πεπερασ. τάξη

$\Rightarrow \ker(\pi \circ \varphi) / \ker(\varphi)$ π.π. αβελιανή + κάθε στοιχείο έχει π. τάξη.

$\Rightarrow \ker(\pi \circ \varphi) / \ker(\varphi)$ πεπερασμένη.

$\square$