Άλγεβρα Ι — Μάθημα: ... 14/11/2022.

Ημιευθέα γινόμενα.

$G = N \rtimes H \rightsquigarrow$ ① $N \trianglelefteq G$

② $N \cap H = \{1\}$ ③ $G = NH$.

Αν G πεπερ. $\Rightarrow |G| = |N|.|H|$.

Παραδείγματα:

① Κάθε ευθύ γινόμενο είναι ημι-ευθύ.

② $S_n = A_n \rtimes \langle (12) \rangle$.

③ $D_n = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$.
- a στροφή τάξης n.
- b ανάκλαση.

Οι υποομάδες N, H δεν καθορίζουν πλήρως την $G = N \rtimes H$

π.χ. $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ και $S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

- $G = N \rtimes H$, κάθε $g \in G$ γράφεται μοναδικά $g = n.h$, $n \in N$, $h \in H$.

$$\left.\begin{matrix} g_1 = n_1.h_1 \\ g_2 = n_2.h_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$= n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})(h_1 \cdot h_2) = [n_1 \tau_{h_1}(n_2)] h_1 \cdot h_2$$

$\in N \trianglelefteq G$.

Απ. έχουμε $\tau : H \to Aut(N)$.

ομομορφ. και $g_1 \cdot g_2 = n_1 \tau(h_1)(n_2) \cdot h_1 h_2$

<u>Αντίστροφα</u>, Έστω H, N ομάδες

και $\varphi : H \to Aut(N)$ ομομορφ.

Στο καρτεσιανό γινόμενο $N \times H$.

ορίζουμε πράξη:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \varphi(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2).$$

Με την πράξη αυτή η $N \times H$

γίνεται ομάδα. και λέγεται το

<u>(εξωτερικό) ημιευθύ γινόμενο</u> των

N, H. Συμβ. $N \rtimes_\varphi H$.

- $\tilde{N} = \{(n, 1) \mid n \in N\} \cong N$
$\trianglelefteq N \rtimes_\varphi H$

- $\tilde{H} = \{(1, h) \mid h \in H\} \leq N \rtimes_\varphi H$
$\cong H$.

- $N \rtimes_\varphi H = \tilde{N} \rtimes_\varphi \tilde{H}$

Ιδιότητες H, N ομάδες.

$\varphi : H \to Aut(N)$ ομομορφ.

(1) $G = N \rtimes_\varphi H$ το αντίστοιχο ευθύ

ανν φ τετριμμένος

αποδ:

$N \rtimes_\varphi H$ το αντίστοιχο ευθύ ανν

$\forall n_1, n_2 \in N$: $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 n_2, h_1 h_2)$

$\forall h_1, h_2 \in H$

ανν " : $(n_1 \cdot \varphi(h_1)(n_2), h_1 \cdot h_2) =$ "

ανν $\forall h_1 \in H$: $\varphi(h_1)(n_2) = n_2$.

$\forall n_2 \in N$

ανν $\forall h_1 \in H$: $\varphi(h_1) = id_N$.

ανν φ τετριμμένος.

Ιδιαιτέρως, αν $N \rtimes_\varphi H$ και, ...

φ όχι τετριμμένος $\Rightarrow$ $N \rtimes_\varphi H$ · όχι

αβελιανή.

② Αν $G = N \rtimes_\varphi H \Rightarrow G/N \cong H$

απόδ. $\forall g \in G, \exists !\, n \in N, h \in H : g = n \cdot h$.

Ορίζεται, $\pi : G \to H$, $g = nh \mapsto h$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{επιμορφ. ομάδων} \\ \ker\pi = N\end{array}\right\} \Rightarrow G/N \cong H$$
□.

Ορσ: Μια βραχεία ακριβής ακολουθία (β.α.α) ομάδων είναι μια ακολουθία ομάδων και ομομορφ. της μορφής:

$$1 \to N \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} H \to 1 \quad \text{τ.ω.}$$

φ 1-1, ψ επί, $\ker\psi = \mathrm{Im}\varphi$.

$$\Rightarrow H \cong G/\ker\psi = G/\mathrm{Im}\varphi. \quad \cong N$$

Δηλ. G περιέχει αντίτυπο της G με αντίστοιχο πηλίκο H.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η G είναι επέκταση της N μέσω της H.

Από προηγούμενη ασκ. κάθε ημιευθύ γιν. δίνει μια β.α.α.

υπάρχουν β.α.α που δεν προέρχονται από ημιευθέα γινόμενα.

$$1 \to 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 1.$$

ή

$$1 \to \langle a^2 \rangle \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 1.$$

$\mathbb{Z}_4 = \langle a \rangle$, αφού $\mathbb{Z}_4$ ως κυκλική έχει μοναδική κυκλική υποομ. τάξης 2. Αν β.α.α. προέρχεται από ημιευθύ γιν. $\to$ $H \cap N = \{1\}$.

$H = N$ ΑΤΟΠΟ

<u>Ορσ</u>: Μια επέκταση

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$$

φ

λέγεται <u>διασπώμενη</u> αν υπάρχει ομομορφ: $\varphi: H \to G$ τ.ω.

$$\pi \circ \varphi = id_H.$$

Κάθε διασπώμενη β.α.α. είναι ημιευθύ γινόμενο.

$G = i(N) \rtimes \varphi(H)$. (άσκηση).

Ισχύει το εξής:

<u>Θεώρημα</u> (Schur–Zassenhaus).

Αν N και H είναι πεπερασμένες ομάδες με τάξεις m και n αντ. με $(m,n)=1$, τότε κάθε επέκταση της N μέσω της H είναι ένα ημιευθύ γινόμενό τους. (<u>Δηλ. διασπώμενη</u>).

Έστω N, H δύο ομάδες. Για να βρούμε τις διασπώμενες επεκτάσεις της N μέσω της H, αρκεί να βρούμε τα μη-ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα

$$G = N \rtimes H.$$

Δηλ. πρέπει να ξέρουμε την $Aut(N)$ και τους δυνατούς ομομορφισμούς

$$H \to Aut(N).$$

<u>Άσκηση</u>: Αν $G = N \rtimes_\varphi H$, τότε

$$C_{\tilde{H}}(\tilde{N}) = (1, \ker\varphi)$$

(άρα αν φ_1 1-1 και φ_2 <u>όχι</u> 1-1 $\Rightarrow$ $N \rtimes_{\varphi_1} H \not\cong N \rtimes_{\varphi_2} H$.)

απόδ.: $n \in H$

$(1, n) \in C_{\tilde{H}}(\tilde{N}) \Leftrightarrow (1, n)\cdot(n, 1) = (n, 1)\cdot(1, n) \quad \forall n \in N$

$\Leftrightarrow \left(1 \circ \varphi(n)(n), n \cdot 1\right) = \left(n \cdot \varphi(1)(1), 1 \cdot n\right) \quad \forall n \in N$

$\Leftrightarrow \left(\varphi(n)(n), n\right) = (n, n)$, — ''

$\Leftrightarrow \varphi(n)(n) = n$, ''

$\Leftrightarrow \varphi(n) = id_N \Leftrightarrow \boxed{n \in \ker\varphi.}$

1| $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong U(\mathbb{Z}_n)$ αβελιανή εξ' ένεκα $\varphi(n)$.

απόδ.:

$\varphi \in Aut(\mathbb{Z}_n)$; $\mathbb{Z}_n = \langle g \rangle$.

$\Rightarrow \varphi(g)$ γεννήτορας της $\mathbb{Z}_n$

$\Leftrightarrow \varphi(g) = g^k$, $(k, n) = 1$ $\quad$ $\#$.

έχουμε δείξει ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα πεπερ. σώματος είναι κυκλική

$\Rightarrow Aut(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_{p-1}$.

2|

$Aut(\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p) \cong GL_n(\mathbb{Z}_p)$.

με $|GL_n(\mathbb{Z}_p)| = (p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$ 8

3) Αν G_1, G_2 πεπερ. ομάδες με $(|G_1|, |G_2|)=1 \Rightarrow$

$$Aut(G_1 \times G_2) \cong Aut(G_1) \times Aut(G_2).$$

Αποδ.:

Ισχυρισμός: Αφού $(|G_1|, |G_2|) = 1$.

$\Rightarrow G_i$ χαρακτηριστική υποομ. της G.

Απ.δ.ο. G_i είναι η μοναδική ομάδα τάξεως $|G_i|$ (αφού αυτομορφισμοί διατηρούν τις τάξεις).

- $(|G_1|, |G_2|) = 1 \Rightarrow (|G_1|, |G/G_1|) = 1$.

Αν $K \trianglelefteq G$ με $|K| = |G_1|$

$\Rightarrow$ μέσω της $\pi: G \to G/G_1$.

έχουμε $\left.\begin{array}{l} |\pi(K)| \mid |G/G_1| \\ |\pi(K)| \mid |K| = |G_1| \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\pi(K) = \{1\} \Rightarrow K \subseteq \ker\pi = G_1$
$\Rightarrow \boxed{K = G_1}$

Τώρα $\operatorname{Aut}(G_1 \times G_2) \to \operatorname{Aut}(G_1) \times \operatorname{Aut}(G_2)$ (9)

$\varphi \longmapsto (\varphi|_{G_1}, \varphi|_{G_2})$.

με $\varphi|_{G_i} \in \operatorname{Aut}(G_i)$ αφού

G_i χαρακτηριστική υποομάδα της

G. $\square$

<u>11</u> Έστω G πεπερασμένη ομάδα. και K κανονική υποομάδα της G με $(|K|, [G:K]) = 1$. Δείξτε υποομάδα. ... είναι μοναδική υποομάδα.