Άλγεβρα Ι:

Άσκηση: Έστω K μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα, H τυχαία ομάδα και $\varphi_1, \varphi_2 : K \to Aut(H)$ με $\varphi_1(K) = \varphi_2(K)$. Τότε

$$H \rtimes_{\varphi_1} K \cong H \rtimes_{\varphi_2} K$$

Απόδ. Έστω $|K| = n$, $K = \langle g \rangle$.

Έστω $|Im\varphi_i| = m$. Εφόσον $\langle \varphi_1(g) \rangle = Im\varphi_1 = Im\varphi_2 = \langle \varphi_2(g) \rangle$

$\Rightarrow \exists\, \alpha : \varphi_1(g) = (\varphi_2(g))^{\alpha}$ και $(\alpha, m) = 1$.

Αντικαθιστώντας το α με το α' όπου $\alpha' = \alpha + km$, όπου $k = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \nmid \alpha}} p$ (πρώτος) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(\alpha, n) = 1$.

Έτσι g^{α} γεννήτορας της $\langle g \rangle$.

και $\exists \beta : g = (g^\alpha)^\beta$. Ορίζουμε (2)

με

$$\psi : H \rtimes_{\varphi_1} K \to H \rtimes_{\varphi_2} K$$

$$\psi(h,k) = (h, k^\alpha).$$

- ψ <u>ομομορφισμός</u>:

$$\psi((h_1,k_1)\cdot(h_2,k_2)) = \psi(h_1 \cdot \varphi_1(k_1)(h_2), k_1 k_2)$$

$$= (h_1 \cdot \varphi_1(k_1)(h_2), (k_1 k_2)^\alpha)$$

$$= (h_1 \varphi_1(k_1)(h_2), k_1^\alpha \cdot k_2^\alpha)$$

$$= (h_1 \varphi_2^\alpha(k_1)(h_2), k_1^\alpha k_2^\alpha)$$

$$= (h_1, k_1^\alpha) * (h_2, k_2^\alpha)$$

$$= \psi(h_1,k_1) * \psi(h_2,k_2).$$

Η ψ είναι ισομορφισμός, με αντίστροφο $(h,k) \longmapsto (h, k^\beta)$.

⊛ Σημειώνουμε ότι το σύνολο.

$\mathcal{U} = \{ p$ πρώτος, $p | n$, $p \nmid a \} \neq \emptyset$.

αν $p | m$, $p \nmid a$ και $p | m | n$.

- Έστω d πρώτος διαιρέτης του n.
- $\underline{d \nmid a}$. Τότε $d | k | km \Rightarrow d \nmid a'$ ($d \nmid a$)
- $\underline{d | a}$: $\left.\begin{array}{l} d \nmid k \\ d \nmid m \end{array}\right\} \Rightarrow d \nmid km$

$(a, m) = 1$

$\Rightarrow d \nmid a' = a + km$.

□.

$\underline{\text{Ασκ}}$: H, K ομάδες, $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ ομομορφ. και $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$. Τότε η απεικόνιση.

$\psi : H \rtimes_{\varphi \circ \sigma} K \to H \rtimes_{\varphi} K$

$\psi(n, k) = (n, \sigma(k))$. είναι ισομορφισμός ομάδων.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi\circ\sigma"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathrm{Aut}(H) \\ K \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

<u>αποδ</u>

Όπως πριν που είχαμε στην ουσία $\sigma: g \mapsto g^{\alpha}$.

• Έστω p, d ζεύγος πρώτων με $p > d$.

① αν $p \not\equiv 1 \bmod d$, τότε κάθε ομάδα τάξεως pd είναι κυκλική

② Αν $p \equiv 1 \bmod d$, τότε υπάρχουν δύο (ως προς ισομορφισμούς) ομάδες τάξεως pd: • η κυκλική $\mathbb{Z}_{pd}$ και • μια μη-αβελιανή της μορφής $\mathbb{Z}_p \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_d$.

Αποδ: $|G| = p \cdot q$, $p > q$.

$n_p \mid q \Rightarrow n_p = 1$ ή q, $n_p \equiv 1 \bmod p$.

$\Rightarrow$ αν $n_p = q \Rightarrow p \mid q-1 \Rightarrow p < q$ ΑΤΟΠΟ

$\Rightarrow n_p = 1$. και η αντίστοιχη Sylow P είναι κανονική.

① $n_q \mid p \Rightarrow n_q = 1$ ή p $\left.\begin{matrix} \\ n_q \equiv 1 \bmod q \end{matrix}\right\} \Rightarrow n_q = 1$.

δηλ. $Syl_q(G) = \{Q\}$.

Άρα, $P, Q \trianglelefteq G$ έχουμε ότι

$G \cong P \times Q = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

② Έχουμε $P \trianglelefteq G$. Αν $P \cap Q = \{1\}$. και

$Q \in Syl_q(G) \Rightarrow$ G θα είναι

$G = P \cdot Q$. Άρα η G είναι ημιευθύ γινόμενο. $G = P \rtimes_\varphi Q$

για κάποιο ομομορφ. $\varphi: \underset{\underset{\mathbb{Z}_q}{\parallel}}{Q} \to \underset{\underset{\mathbb{Z}_{p-1}}{\cong}}{Aut(P)}$

[illegible] 1 ή q ή 4.

• Αν φ τετριμμένος (δηλ. ⑥ $\ker\varphi = Q$) $\Rightarrow$ το γινόμενο είναι ευθύ και πάλι $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$

• Έστω ότι φ <u>δεν</u> είναι τετρ., τότε αφού Q απλή και $\ker\varphi \underset{\neq}{\trianglelefteq} \mathbb{Z}_q$

$\Rightarrow \ker\varphi = \{1\}$.

Δηλ. φ 1-1, και $|\mathrm{Im}\varphi| = |\mathbb{Z}_q| = q$.

Επομένως, η $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)$ είναι πεπερ. κυκλική, υπάρχει μοναδική υποομ. για κάθε θετικό διαιρέτη της τάξεως αυτής. Επιπλέον, υπάρχει

$\varphi : Q \to \mathrm{Aut}(P) = \mathbb{Z}_{p-1} = \langle x \rangle$ μη-τετρ.

$Q = \langle g \rangle$, $g \mapsto x^{\frac{p-1}{q}}$ (από υποθ. $q \mid p-1$)

Επομένως φ μη-τετρ., το μοναδικό (ως προς ισομορφ.) γινόμενο δηλ. $P \rtimes_\varphi Q$ είναι μη-αβελιανό

7

Άσκ Υπάρχουν 5 ομάδες (ως προς ισομορφ.) τάξεως $20 = 2^2 \cdot 5$

Λύση $\left.\begin{matrix} n_5 \mid 2^2 \\ n_5 \equiv 1 \mod 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{n_5 = 1}$

δηλ. $Syl_5(G) = \{Q\}$ και $Q \trianglelefteq G$

Έστω $P \in Syl_2(G) \Rightarrow P \cap Q = \{1\}$.

και $G = Q \cdot P$, άρα $G = Q \rtimes_\varphi P$.

όπου $\varphi : P \to Aut(Q) = Aut(\mathbb{Z}_5) = \mathbb{Z}_4$.

Αν $Q = \langle \beta \rangle \Rightarrow Aut(Q) = \langle \pi \rangle$, $\pi : \beta \mapsto \beta^2$

Η ταξινόμηση των ομάδων τάξεως 20 ανάγεται στην εύρεση $\varphi : P \to Aut(Q)$ και στον έλεγχο ποιοι από αυτούς μου δίνουν ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα.

$|P| = 2^2 \Rightarrow P$ αβελ. $\Rightarrow P = \mathbb{Z}_4$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

<u>1η περ.</u>: $P = \mathbb{Z}_4 = \langle \alpha \rangle$: $\varphi : P \to Aut(Q) = \mathbb{Z}_4$.

Για την $Im\varphi$ υπάρχουν οι εξής.

Περιπτώσεις: $|Im\varphi| = 1$ ή 2 ή 4.

(α) Αν $|Im\varphi| = 1 \Rightarrow \varphi$ τετριμμένος

και $G = Q \rtimes_\varphi P = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{20}$

(β). $|Im\varphi| = 2$. (π.χ. $\varphi_1 : \alpha \mapsto \pi^2$).

(γ) $|Im\varphi| = 4$ (π.χ. $\varphi_2 : \alpha \mapsto \pi$).

Εφόσον, P κυκλική, ομομορφ. φ με την ίδια εικόνα μας δίνουν ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα. Επίσης, αφού $Aut(Q)$ κυκλική υπάρχει μοναδική υποομάδα τάξεως 2 και μοναδική τάξεως 4.

Άρα, αν $|Im\varphi| = 2$, τότε

$Q \rtimes_\varphi P \cong Q \rtimes_{\varphi_1} P$ (φ_1 μη-τετρ. μ αβζ).

και αν $|Im\varphi| = 4$, τότε $Q \rtimes_\varphi P \cong Q \rtimes_{\varphi_1} P$. μ αβζ.

Εφόσον $\ker\varphi_2 = \{1\} \neq \ker\varphi_2$, οι ομάδες $Q \rtimes_{\varphi_1} P \not\cong Q \rtimes_{\varphi_2} P$.

Είναι μη ισόμορφες μεταξύ (9).
τους. Στην τη περίπτωση
($P \cong \mathbb{Z}_4$) έχουμε 3 ομάδες
τάξεως 20. $\rightsquigarrow \mathbb{Z}_{20}$

$\rightsquigarrow a \rtimes_{\varphi_1} P$

$\rightsquigarrow a \rtimes_{\varphi_2} P$.