Άλγεβρα I (23/11/2022) ①

Μάθημα 14ο

Συνέχεια ταξινόμησης ομάδων.

$G = Q \rtimes_{\varphi} P$, $\varphi : P \to \mathrm{Aut}(Q)$

$P \in \mathrm{Syl}_2(G)$ και $|P| = 2^2 \Rightarrow P = \mathbb{Z}_4$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

2η περίπτωση:

$P = \underset{\langle a \rangle}{\mathbb{Z}_2} \times \underset{\langle \gamma \rangle}{\mathbb{Z}_2} \to$ αν $\varphi : P \to \mathrm{Aut}(Q) = \mathbb{Z}_4 = \langle \pi \rangle$.
ομομορφ.

$\Rightarrow |\mathrm{Im}\varphi| = 1$ ή 2, αφού είναι αβελιανή και παράγεται από δύο στοιχεία $\varphi(a)$ και $\varphi(\gamma)$ που έχουν τάξη το πολύ 2.

(α) $\mathrm{Im}\varphi = \{1\} \Rightarrow$ το ημιευθύ γινόμενο είναι το αντίστοιχο ευθύ $\Rightarrow$

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$.

(β) Αν $|\mathrm{Im}\varphi| = 2 \Rightarrow \mathrm{Im}\varphi = \langle \pi^2 \rangle$.
(αφού $\mathbb{Z}_4$ κυκλική)

②

- $\varphi_1 : \alpha \mapsto \pi^2, \quad \gamma \mapsto 1$, $\varphi_2 : \alpha \mapsto 1, \quad \gamma \mapsto \pi^2$.

$\varphi_3 : \alpha \mapsto \pi^2, \quad \gamma \mapsto \pi^2$.

τώρα αν:

$\sigma : \alpha \mapsto \gamma, \quad \gamma \mapsto \alpha \in Aut(P)$.

$\tau : \alpha \mapsto \alpha, \quad \gamma \mapsto \alpha\gamma^{-1} \in Aut\, P$

$\Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 \circ \sigma$.

$\varphi_3 = \varphi_1 \circ \tau$.

Άρα, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ είναι "ισοδύναμοι mod Aut(P)" ομομορφ. Συνεπώς, δίνουν ισόμορφα ημιευθέα γινόμενα.

Τελικά στην 2η περίπτωση ∃ 2 ημιευθέα γινόμενα (ως προς ισομορφισμό).

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ η αβελιανή
- $Q \rtimes_{\varphi_1} P \leftarrow$ μη αβελιανή γιατί φ_1 μη-τετρ.

Οι ομάδες τάξεως 20 στην 1η περίπτωση, είναι μη ισόμορφες με αυτές της περίπτωσης 2, γιατί στην 1. οι 2-Sylow είναι κυκλικές, ενώ στην 2 όχι ($\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$)

$\boxed{\text{Ελεύθερα Γινόμενα}}$

Ορσ

Έστω G_a, $a \in I$ μια οικογένεια ομάδων. ① Μια λέξη στο αλφάβητο $\bigsqcup_{a \in I} G_a$, μήκους n είναι μια πεπερασμένη ακολουθία της μορφής $(g_1, \dots, g_n)$, όπου $g_i \in \bigsqcup_{a \in I} G_a$.

② Μια λέξη $(g_1 \dots g_n)$, όπου $g_i \in G_{a_i}$ λέγεται ανηγμένη (α) αν $a_i \neq a_{i+1}$, $\forall i$, δηλαδή διαδοχικά στοιχεία ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες.

(β) $g_i \neq 1_{G_{a_i}}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

③ Θεωρούμε την <u>κενή λέξη</u> ($\emptyset$) ④ ως τη μοναδική ανηγμένη λέξη ( ) μήκους 0.

④ Κάθε μία από τις ακόλουθες "δράσεις" λέγεται <u>στοιχειώδης αναγωγή</u>.

(i) $(g_1,\dots,g_i,g_{i+1},\dots,g_n) \mapsto (g_1,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots)$

αν $a_i = a_{i+1}$, δηλ. g_i, g_{i+1} ανήκουν στην ίδια ομάδα G_{a_i}

(ii) $(g_1,\dots,g_i,1_{G_{a_j}},g_{i+1},\dots,g_n)$

$\mapsto (g_1,\dots,g_i,g_{i+1},\dots,g_n)$.

Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή κάθε στοιχειώδους αναγωγής μειώνει το μήκος κατά 1. Από κάθε λέξη προκύπτει μια ανηγμένη λέξη με διαδοχικές στοιχειώδεις αναγωγές.

Έστω W το σύνολο των ανηγμένων λέξεων στο $\bigsqcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ και $S(W)$ την ομάδα μεταθέσεων επί του W.

– Για κάθε $\alpha\in I$ και $g\in G_\alpha$ ορίζουμε μετάθεση

$\mathcal{L}_g^\alpha(W)\in S(W)$ ως εξής:

• $\boxed{\text{αν } g\neq 1_{G_\alpha}}$

$$\mathcal{L}_g^\alpha(g_1,\dots,g_n) = \begin{cases} (g,g_1,\dots,g_n), & \text{αν } g\notin G_{\alpha_1}\ (\alpha\neq\alpha_1) \\ (gg_1,g_2,\dots,g_n), & \text{αν } \alpha=\alpha_1,\ g\cdot g_1 = 1_{G_\alpha} \\ (g_2,\dots,g_n), & \alpha=\alpha_1,\ g\cdot g_1 = 1_{G_\alpha} \end{cases}$$

Ορίζουμε

$\mathcal{L}_g^\alpha(\emptyset) = (g)$.

• Αν $\boxed{g_\alpha = 1_{G_\alpha}}$, τότε ορίζουμε

$\mathcal{L}_g^\alpha = id_W$.

Παρατήρηση: $\boxed{\mathcal{L}^\alpha_{g\cdot g'} = \mathcal{L}^\alpha_g\circ\mathcal{L}^\alpha_{g'}}$ (1)

$\forall\, g,g'\in G_\alpha$.

⑥

$\Rightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{g} \circ \mathcal{L}^{\alpha}_{g^{-1}} = id_{W} \Rightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{g}$ είναι 1-1 και επί, δηλαδή είναι πράγματι μετάθεση.

• η απεικόνιση $i_\alpha : G_\alpha \to S(W)$
$$g \mapsto \mathcal{L}^{\alpha}_{g}$$
είναι μονομορφισμός ομάδων.

Πράγματι, ομομορφισμός λόγω της ①

<u>1-1</u>: $g \neq g' \Rightarrow \mathcal{L}^{\alpha}_{g}(\phi) = (g) \neq (g') = \mathcal{L}^{\alpha}_{g'}(\phi)$

$\Rightarrow i_\alpha(g) \neq i_\alpha(g')$.

<u>Ορσ.</u>: Το <u>ελεύθερο γινόμενο</u> των ομάδων G_α, $\alpha \in I$, ορίζεται να είναι η υποομάδα της $S(W)$ που παράγεται από τις εικόνες $i_\alpha(G_\alpha)$.

<u>Συμβ.</u> $\underset{\alpha \in I}{*} G_\alpha$. Δηλ.

$$\underset{\alpha \in I}{*} G_\alpha = \langle i_\alpha(G_\alpha) \mid \alpha \in I \rangle \leq S(W).$$

- Αν $I = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, τότε συμβ.

$$G_{\alpha_1} * G_{\alpha_2}.$$

- Αν $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — σ. $\displaystyle \mathop{\ast}_{i=1}^{n} G_i$

$$= G_1 * G_2 * \cdots * G_n.$$

Παρατήρηση:

$$i_\alpha(G_\alpha) \cap i_\beta(G_\beta) = \{1\}, \text{ αν } \alpha \neq \beta.$$

αποδ.: αν $1_{G_\alpha} \neq g_\alpha \Rightarrow i_\alpha(g_\alpha)(\phi) = (g_\alpha)$ $\neq$

$g_\beta \neq 1_{G_\beta} \Rightarrow i_\beta(g_\beta)(\phi) = (g_\beta)$

$$\Rightarrow i_\alpha(g_\alpha) \neq i_\beta(g_\beta) \qquad \square.$$