

Μαθημα

(30/11/2022)

①

Καθοδική ιδιότητα ως ομόμορφ.

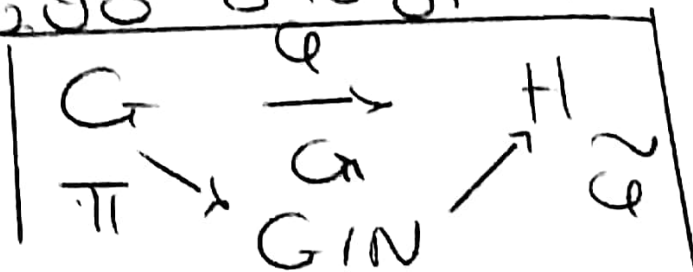
Πρωτό

Εστω  $N \trianglelefteq G$  και  $\varphi: G \rightarrow H$  ομομορφ.

Αν  $N \subseteq \ker \varphi$ ,  $\exists!$  ομομορφ.  $\tilde{\varphi}: G/N \rightarrow H$

π.ω το ακόλουθο διαγράμμα να είναι

μεταθετικό:



Πρόταση

Εστω  $G = G_1 * G_2$  και  $N_i \trianglelefteq G_i$

Αν  $N_i \in N$  συνβορτζιζουκε των  
μικροτερων κλειστων υποομάδων  
της  $G$  που περιεχει της  $N_1, N_2$

$\Rightarrow G/N \cong G_1/N_1 * G_2/N_2$

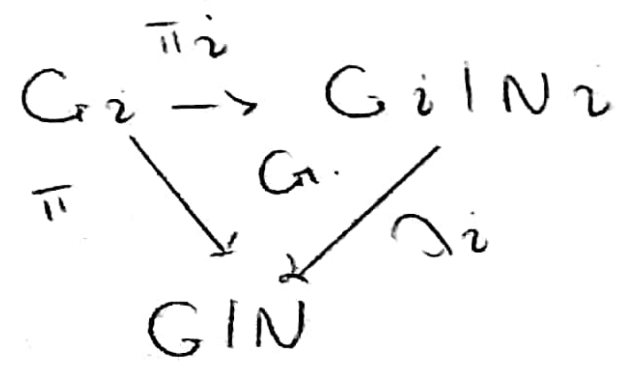
Αποδ:

Θεωρουμε τις  $G_1, G_2$  ως υποομαδες της  $G = G_1 * G_2$   
των ελευτεριων  $i_1, i_2$

Θεωρουμε  $\lambda_i: G_i/N_i \rightarrow G/N$

$g_i N_i \mapsto g_i N$

Εστω  $\pi_i: G_i \rightarrow G_i/N_i, \pi: G \rightarrow G/N$   
φυσικοι επιμορφωμοι



Απο την καθολικη ιδιτητα της  
ομαδας πηγακο. υπαρξω καθικοι  
ομομορφω.  $\lambda_i: G_i/N_i \rightarrow G/N, \lambda_i \circ \pi_i = \pi$

Θα αποδείξεις ότι  $w$  "επιβάλλει" (3)

$(G/N, G_2/N_2, N_2)$  ικανοποιεί την κανονική συνθήκη του ελεύθερου γινόμενου. Απο αυτού έπεται ότι

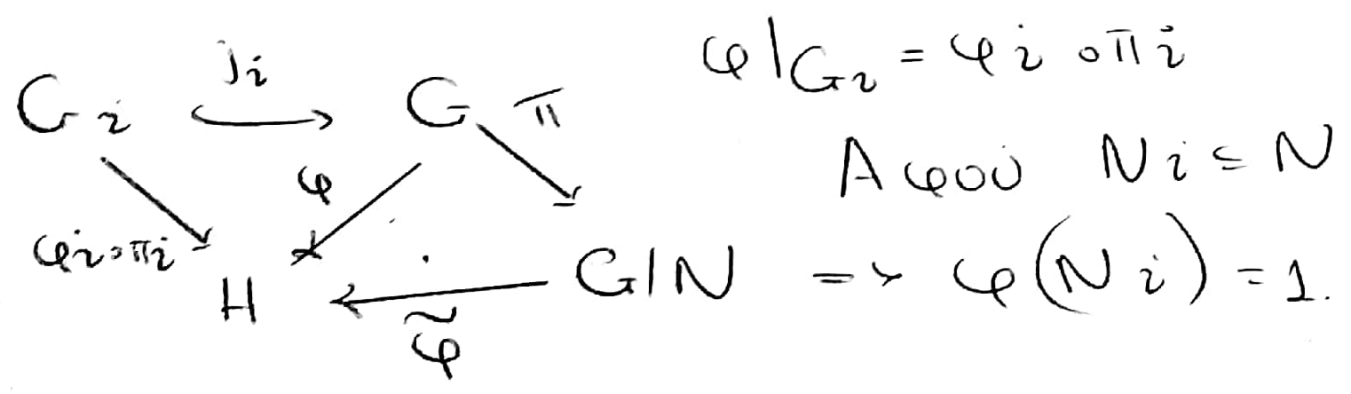
$$G/N \cong G_1/N_1 * G_2/N_2.$$

Έστω  $H$  τυχαία και ομοιομορφη.

$$\varphi_2: G_2/N_2 \rightarrow H$$

Θεωρούμε την  $G_2 \xrightarrow{\pi_2} G_2/N_2 \xrightarrow{\varphi_2} H$ .

Από την καθολική ιδιότητα του ε.δ.  $\exists!$   $\varphi: G \rightarrow H$  τέτοιο ώστε ακολουθούν διαγράμματα να είναι μεταδ.



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} N_1, N_2 \subseteq \ker \varphi \\ \ker \varphi \cong G \end{array} \right\} = \varphi N \subseteq \ker \varphi.$$

Από την καθολική ιδιότητα της ομομορφίας  $\exists!$   $\tilde{\varphi}: G/N \rightarrow H$  με  $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ .

• Το διάγραμμα είναι βεταθωτικό (4)

$$\begin{array}{ccc} G_i/N_i & \xrightarrow{\lambda_i} & G/N \\ & \searrow \varphi_i & \swarrow \tilde{\varphi} \\ & H & \end{array} \quad (\Delta)$$

Πρόσθεσι,  $\tilde{\varphi} \circ \lambda_i (g_i N_i)$

$$= \tilde{\varphi} \circ \lambda_i \circ \pi_i (g_i) = \tilde{\varphi} \circ \pi (g_i)$$

$$= \varphi (g_i) = \varphi_i \circ \pi_i (g_i) = \varphi_i (g_i N_i).$$

• ω  $\tilde{\varphi}$  είναι ω κωσθδική πω.  
κάνει το (Δ) βεταθωτικό

Έστω  $\psi: G/N \rightarrow H$  βε.  
 $\psi \circ \lambda_i = \varphi_i$  τότε για τους γεννη-  
 τωρες  $g_i N$ ,  $g_i \in G_i$ ,  $i=1,2$ .

$$\begin{aligned} \rightarrow \tilde{\varphi} (g_i N) &= \tilde{\varphi} \circ \pi (g_i) \\ &= \tilde{\varphi} \circ \lambda_i \circ \pi_i (g_i) = \varphi_i \circ \pi_i (g_i) \\ &= \psi \circ \lambda_i \circ \pi_i (g_i) = \psi \circ \pi (g_i) \\ &= \psi (g_i N) \end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις: Ομοίως, αποδεικ-⑤

υψεται το ακέραιο.

Αν  $N \trianglelefteq G$  και  $N$  κανονική υποομάδα που παράγεται από

$$\bigcup_{\alpha \in I} N_{\alpha} \text{ στο } *_{\alpha} G_{\alpha} \Rightarrow G/N \cong *_{\alpha} G_{\alpha}/N_{\alpha}$$

Πόρισμα: Αν  $G = G_1 * G_2$  και

$N$  κανονική υποομάδα που παράγεται από του παράγοντα,  $G_1$

$$\Rightarrow G/N \cong G_2.$$

Λέμμα 1:

$$G_{\alpha} \neq \{1\}, \forall \alpha \in I \text{ και } |I| > 2$$

$$\Rightarrow Z(*_{\alpha} G_{\alpha}) = \{1\}.$$

Αποδ.: Υποθέτουμε ότι  $Z(*_{\alpha} G_{\alpha})$

$$\text{και έστω } 1 \neq g_1 \cdots g_n \in Z(*_{\alpha} G_{\alpha}) \neq 1.$$

κάνονικη βοήθη

όπου  $g_i \in G_{\alpha_i}$ .

Εφόσον  $|I| \geq 2$ , υπάρχει παράγοντας

$$G_{\beta} \neq G_{\alpha} \text{ και } g_{n+1} \in G_{\beta} \setminus \{1\}.$$

11 0 4 0 1 1 1

Αφού  $g \in Z(G)$  έχουμε

ⓐ

$$\underbrace{g_1 \dots g_n}_{\textcircled{1}} \cdot g_{n+1} = g_{n+1} \underbrace{g_1 \dots g_n}_{\textcircled{2}}$$

Από την επίλυση του  $g_{n+1} \cdot n$  ⓐ είναι σε ανωθήμεν μορφή.

• Αν και το ⓑ είναι σε ανωθήμεν μορφή.  $\rightarrow g_{n+1} = g_n$  αποτίο

• Αν το ⓑ δεν είναι σε ανωθήμεν μορφή προκύπτει ότι θα έχει μήκος  $\alpha$  από το μήκος ⓐ αποτίο.

Πρόταση 2, Κ & Θ. Ελέοθερο

χινόμενο  $\ast_{\alpha \in J} G_\alpha$  με  $G_\alpha \neq \{1\}$ .

και  $|J| \geq 2$  περιέχει στοιχεία.

απειρητά  $\ast_{\alpha \in J} G_\alpha$  (ιδιαίτερα είναι

είναι άπειρη ομάδα). ⊕

Άλλος Έστω  $g_1, g_2$  με τέτα.

στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικούς παράξυτες.

$$= \underbrace{g^n}_{\text{ανυθκωμ βωρφη}} = g_1 g_2 g_1 g_2 \dots (g_1 g_2)^{\frac{n}{2}} \neq 1$$

ΟΡ6: Έστω  $g = g_1 \dots g_r$   $n$   
ανυθκωμ βωρφη ενός  $1 \neq g \in *G_{\alpha}$ .

Η παραπάνω ανυθκωμ βωρφη ( $n$  το  
στοιχείο) λέγεται κυκλικά ανυθκωμ

nm αν  $n=1$   $n$  αν τα  $g_1, g_r$   
ανήκουν σε διαφορετικούς παράξυτες.

Παρατηρήσω Αν  $g = g_1 \dots g_r$   
κυκλικά ανυθκωμ βωρφη με  $n > 1$ .

$$\Rightarrow o(g) = \infty$$

Λέμμα 3: Κάθε  $1 \neq g \in *G_{\alpha}$   
είναι συζυγές με κυκλικά ανυθκωμ  
 $nm$  λέξω.

Έστω  $g = g_1 \dots g_n$  ανυθκωμ βωρφη

(β) Αν  $g_1, g_n$  ανήκουν στον ίδιο παράγοντα.  $g_n g g_n^{-1} = (g_n g) \cdot g_n^{-1} = (g_n g) \dots g_{n-1}$ . Από ε-ν.

$g_n g g_n^{-1} = x w x^{-1}$ , όπου  $w$  κυκλικά ανήκει.  $\square$

Πρόταση 41. Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης σε ένα ελεύθερο διάνυσμα περιέχεται σε ουδέτερο ελεύθερο παράγοντα.

Απόδειξη. Έστω  $1 \neq g \in \ast_a G$  και  $g^k = 1$ . Από το προηγ.  $g = x w x^{-1}$ .

$\Rightarrow g^k = w^k = 1 \Rightarrow w \in G_a$ , αφού ανήκει κάθε κυκλικά ανήκει. Άρα  $g$  έχει  $\square$  απειροελάχιστη