Μάθημα (30/11/2022) ①

Καθολική ιδιότητα της ομάδας

πηλίκο

Έστω $N \trianglelefteq G$ και $\varphi : G \to H$ ομομορφ.
Αν $N \leq \ker\varphi$, $\exists !$ ομομορφ. $\tilde{\varphi} : G/N \to H$
τ.ω το ακόλουθο διάγραμμα να είναι
μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Πρόταση

Έστω $G = G_1 * G_2$ και $N_i \trianglelefteq G_i$, $i = 1, 2$.

Αν με N συμβολίζουμε την μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει τις N_1, N_2

$$\Rightarrow G/N \cong G_1/N_1 * G_2/N_2 .$$

αποδ:

Θεωρούμε τις G_1, G_2 ως υποομάδες της $G = G_1 * G_2$ μέσω των εμφυτεύσεων i_1, i_2.

Θεωρούμε $\lambda_i : G_i/N_i \to G/N$

$g_i N_i \mapsto g_i N$

Έστω $\pi_i : G_i \to G_i/N_i$, $\pi : G \to G/N$

φυσικοί επιμορφισμοί

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & G_i/N_i \arrow[d, "\lambda_i"] \\
& G/N
\end{tikzcd}$$

Από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί $\lambda_i : G_i/N_i \to G/N$, $\lambda_i \circ \pi_i = \pi$

Θα αποδείξουμε ότι η "τριάδα." ③

$(G/N,\ G_i/N_i,\ \lambda_i)$ ικανοποιεί την κανονική συνθήκη του ελεύθερου γινομένου· από όπου έπεται ότι

$$G/N \cong G_1/N_1 * G_2/N_2 .$$

Έστω H τυχαία και ομομορφ.

$\varphi_i : G_i/N_i \to H$

Θεωρούμε την $G_i \xrightarrow{\pi_i} G_i/N_i \xrightarrow{\varphi_i} H$.

Από την καθολική ιδιότητα του ε.γ. $\exists!\ \varphi : G \to H$ τ.ω. το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθ.

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, hook, "j_i"] \arrow[dr, "\varphi_i \circ \pi_i"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
 & H & G/N \arrow[l, "\tilde{\varphi}"]
\end{tikzcd}$$

$\varphi|_{G_i} = \varphi_i \circ \pi_i$

Αφού $N_i \subseteq N$ $\Rightarrow \varphi(N_i) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow N_1, N_2 \subseteq \ker\varphi \\ \ker\varphi \trianglelefteq G \end{array}\right\} \Rightarrow N \subseteq \ker\varphi .$$

Από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο, $\exists!\ \tilde{\varphi} : G/N \to H$ με $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$

• <u>Το διάγραμμα είναι μεταθετικό</u> ④

$$\begin{tikzcd} G_i/N_i \arrow[rr, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & G. & G/N \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"] \\ & H & \end{tikzcd} \quad (\Delta)$$

Πράγματι, $\tilde{\varphi}\circ\lambda_i(g_iN_i)$

$= \tilde{\varphi}\circ\lambda_i\circ\pi_i(g_i) = \tilde{\varphi}\circ\pi(g_i)$

$= \varphi(g_i) = \varphi_i\circ\pi_i(g_i) = \varphi_i(g_iN_i)$.

• <u>η $\tilde{\varphi}$ είναι η μοναδική που κάνει το (Δ) μεταθετικό</u>

Έστω $\psi: G/N \to H$ με $\psi\circ\lambda_i = \varphi_i$. Τότε για τους γεννήτορες g_iN, $g_i\in G_i$, $i=1,2$.

$\to \tilde{\varphi}(g_iN) = \tilde{\varphi}\circ\pi(g_i)$

$= \tilde{\varphi}\circ\lambda_i\circ\pi_i(g_i) = \varphi_i\circ\pi_i(g_i)$

$= \psi\circ\lambda_i\circ\pi_i(g_i) = \psi\circ\pi(g_i)$

$= \psi(g_iN)$

□.

Παρατήρηση: Ομοίως αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Αν $N_\alpha \trianglelefteq G_\alpha$ και N η κανονική υποομάδα που παράγεται από $\bigcup_{\alpha \in I} N_\alpha$ στο $\underset{\alpha}{*} G_\alpha \Rightarrow G/N \cong \underset{\alpha}{*} G_\alpha/N_\alpha$

Πόρισμα: Αν $G = G_1 * G_2$ και N η κανονική υποομάδα που παράγεται από τον παράγοντα G_1 $\Rightarrow G/N \cong G_2$.

Άσκηση 1:

$G_\alpha \neq \{1\}$, $\forall \alpha \in I$ και $|I| \geq 2$ $\Rightarrow Z\left(\underset{\alpha}{*} G_\alpha\right) = \{1\}$.

απόδ: Υποθέτουμε ότι $Z\left(\underset{\alpha}{*} G_\alpha\right) \neq 1$.

και έστω $1 \neq \underbrace{g_1 \cdots g_n}_{= g \text{. κανονική μορφή}} \in Z\left(\underset{\alpha}{*} G_\alpha\right)$

όπου $g_i \in G_{\alpha_i}$.

Επειδή $|I| \geq 2$, υπάρχει παράγοντας $G_\beta \neq G_{\alpha_n}$ και $g_{n+1} \in G_\beta \setminus \{1\}$

Αφού $g \in Z(G)$ έχουμε

$$\underbrace{g_1 \cdots g_n \cdot g_{n+1}}_{1} = \underbrace{g_{n+1} g_1 \cdots g_n}_{2}$$

Από την επιλογή του g_{n+1}, η 1 είναι σε ανηγμένη μορφή.

- Αν και το 2 είναι σε ανηγμένη μορφή → $g_{n+1} = g_n$ άτοπο

- Αν το 2 δεν είναι σε ανηγμένη μορφή προκύπτει ότι θα έχει μήκος < από το μήκος 1 Άτοπο.

Λήμμα 2. Κάθε ελεύθερο γινόμενο $\ast_{\alpha \in J} G_\alpha$ με $G_\alpha \neq \{1\}$ και $|J| \geq 2$ περιέχει στοιχεία άπειρης τάξης (ιδιαίτερα είναι

είναι άπειρη ομάδα).

<u>απόδ</u> Έστω g_1, g_2 μη τετρ. στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετι-κούς παράγοντες.

$\Rightarrow g^n = g_1 g_2 g_1 g_2 \cdots (g_1 g_2) \neq 1$

ανηγμένη μορφή

<u>Ορσ</u>: Έστω $g = g_1 \cdots g_\nu$ η ανηγμένη μορφή ενός $1 \neq g \in \ast_\alpha G_\alpha$.

Η παραπάνω ανηγμ. μορφή (ή το στοιχείο) λέγεται <u>κυκλικά ανηγμένη</u> αν $\nu = 1$ ή αν τα g_1, g_ν ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες.

<u>Παρατήρηση</u> Αν $g = g_1 \cdots g_\nu$ κυκλικά ανηγμένη μορφή με $\nu > 1$.

$\Rightarrow o(g) = \infty$.

<u>Άσκηση 3</u>: Κάθε $1 \neq g \in \ast_\alpha G_\alpha$ είναι συζυγές με κυκλικά ανηγμένη λέξη.

Έστω $g = g_1 \cdots g_n$ ανηγμ. μορφή

(β) Αν g_1, g_n ανήκουν στον ίδιο παράγοντα. $g_n g g_n^{-1} = (g_n \cdot g) \cdot g_n^{-1}$

$= (g_n g) \cdots g_{n-1}$. Από ε.υ.

$g_n g g_n^{-1} = x w x^{-1}$, όπου w κυκλικά ανηγμ.

$\Rightarrow g = (g_n^{-1} x) w (x^{-1} g_n)$. □

<u>Άσκηση 4.</u> Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης σε ένα ελεύθερο γινόμενο περιέχεται σε συζυγές ενός ελεύθερου παράγοντα.

<u>Απόδ.</u> Έστω $1 \neq g \in \ast_{\alpha} G_\alpha$ και $g^k = 1$. Από το προηγ. $g = x w x^{-1}$ (κυκλ.)

$\Rightarrow g^k = w^k = 1 \Rightarrow w \in G_\alpha$, αφού αλλιώς κάθε κυκλικά ανηγμ. λέξη $\neq$ g έχει ... απειρη τάξη