Άλγεβρα Ι: (05/12/2022) ②

• Αν $G = \underset{\alpha}{*} G_\alpha$ και $G_\alpha = \underset{\beta}{*} H_{\alpha\beta}$.

τότε G είναι το ελεύθερο γινόμενο $\underset{\alpha,\beta}{*} H_{\alpha\beta}$ όλων των $H_{\alpha\beta}$ (λέγεται επιλεπτών των αρχικών).

(απόδ. με καθολική ιδιότητα)

• Αν $G = \underset{\alpha}{*} G_\alpha$ και για κάθε α παράγονται, έχουμε υποομάδα $1 \le H_\alpha \le G_\alpha$ τότε η υποομάδα H της G που παράγεται από τις H_α θα είναι ελεύθερο γινόμενο των H_α, δηλ. $\underset{\alpha}{*} H_\alpha = H$.

(απόδ. με την μοναδικότητα των "ανηγμένων μορφών")

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα (Κurosh)

Έστω $G = \ast_i G_i$ και $H \leq G$.

Τότε $H = F \ast_j H_j$ όπου F ελεύθερη ομάδα και H_j είναι τομές της H με συζυγή των παραγόντων G_i, δηλ. $H_j = H \cap g G_{i(j)} g^{-1}$.

Καθολική ιδιότητα των ευθέων αθροισμάτων αβελιανών ομάδων

Έστω G αβελιανή ομάδα και μια οικογένεια G_α, $\alpha \in A$ αβελιανών ομάδων και ομομορφ. $i_\alpha : G_\alpha \to G$.

Τότε η G είναι ισόμορφη με το $\bigoplus_\alpha G_\alpha$ ανν ικανοποιείται η ακόλουθη:

(K.S.) Για κάθε αβελιανή ομάδα H

και κάθε οικογένεια $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ & H \end{tikzcd}$$

$\exists !$ ομομορφ. $\varphi : G \to H$ τω. $\varphi \circ i_\alpha = \varphi_\alpha \ \forall \alpha$.

∘ Αν $G = \ast_\alpha G_\alpha$ και G' η παράγωγος υποομ. της G, τότε

$$G/G' \cong \bigoplus_\alpha G_\alpha / G_\alpha'$$

<u>Αποδ</u>: Έστω $G \to G/N$ και $\pi_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha / G_\alpha'$ φυσικοί επιμορφ.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & G_\alpha / G_\alpha' \arrow[d, "\vartheta_\alpha"] \\ & G/N \end{tikzcd}$$

$G_\alpha' \subseteq \ker \pi \Rightarrow$ υπάρχει ! ϑ_α ομομορφ. $\vartheta_\alpha : G_\alpha / G_\alpha' \to G/N$ με $\vartheta_\alpha \circ \pi_\alpha = \pi$

Θα δείξουμε ότι η "τριάδα" $(G/G', G_\alpha / G_\alpha', \vartheta_\alpha)$ ικανοποιεί την καθολική συνθήκη του ευθέως αθροίσματος $\bigoplus_\alpha G_\alpha / G_\alpha'$, από όπου έπεται ότι $G/N \cong \bigoplus_{\alpha} G_\alpha / G_\alpha'$

Έστω H αβελιανή και $\varphi_\alpha : G_\alpha / G_\alpha' \to H$ ομομορφ.

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi_\alpha \circ \pi_\alpha"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\
 & H
\end{tikzcd}$$

Από (κ.S.) των ελευθέρου γινομένων $\ast_\alpha G_\alpha$ υπάρχει! $\varphi : G \to H$ ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό $\forall \alpha \in A$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/N \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
 & H
\end{tikzcd}$$

$G/\ker\varphi \cong \varphi(G) \leq H$ αβελιανή

$\Rightarrow G' \leq \ker\varphi$.

Άρα από Κ.Ι. ομάδα πηλίκο $\exists!\ \tilde{\varphi} : G/N \to H$ τ.ω. $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

- Το διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha/G_\alpha' \arrow[r, "\lambda_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & G/N \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
 & H
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi} \circ \lambda_\alpha (g_\alpha G_\alpha') = \tilde{\varphi} \circ \lambda_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha)$

$= \tilde{\varphi} \circ \pi (g_\alpha) = \varphi (g_\alpha) = \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha)$

$= \varphi_\alpha (g_\alpha G_\alpha')$.

Μοναδικότητα ως προς την ικανοπ.
του διαγράμματος

Αν $\psi : G / G' \to H$ τ.ω. $\psi \circ \lambda_\alpha = \varphi_\alpha$

$\tilde{\varphi} (g_\alpha G') = \tilde{\varphi} \circ \pi (g_\alpha) = \varphi (g_\alpha)$

$= \varphi_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha) = \psi \circ \lambda_\alpha \circ \pi_\alpha (g_\alpha)$

$= \psi \circ \pi (g_\alpha) = \psi (g_\alpha G')$. □

Ελεύθερες Ομάδες:

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο. Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε την άπειρη κυκλική α_x που παράγεται από το x ($(x, n) \underset{1-1\ \epsilon\pi\iota}{\longleftrightarrow} m$ $\{x\} \times \mathbb{Z} \underset{\epsilon\pi\iota}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}} \mathbb{Z}$ έχει δομή ομάδας) η ελεύθερη

του X είναι η ομάδα

$$F(X) = \ast_{x\in X} \langle x \rangle = \ast_{x\in X} \mathbb{Z}$$

Άρα η $F(X)$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο αντιτύπων της άπειρης κυκλικής $\mathbb{Z}$ ένα αντίτυπο για κάθε $x \in X$.

Αν $X = \emptyset$ τότε ορίζουμε $F(X) = \{1\}$.

Το X λέγεται <u>βάση</u>* της $F(X)$ (είναι σύνολο γεννητόρων της $F(X)$)

και το $|X|$ τάξη της $F(X)$.

(* η σύνολο ελευθέρων γεννητόρων)

<u>Παρατηρήσεις:</u>

① Αν $X \neq \emptyset$, τότε $F(X)$ δεν έχει στοιχεία πεπερ. τάξεως (εκτός από το τετριμμένο.)

αφού είναι ελεύθερο γινόμενο που ...

έχουν αυτή την ιδιότητα.

② $Z(F(X)) = \{1\}$, αν $|X| \geq 2$

Αν $X = \{x\}$ (δηλ. $|X| = 1$) →

$Z(F(\{x\})) = Z(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

<u>Θεώρημα</u> (κ.ς.)

Έστω $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί του συνόλου X. Για κάθε ομάδα H και κάθε

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(X) \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

απεικόνιση $\varphi: X \to H$, υπάρχει μοναδικός ομομορφ. $\tilde{\varphi}: F(X) \to H$ με $\tilde{\varphi}|_X = \varphi$.

<u>αποδ</u>: Κάθε απεικόνιση $\varphi: X \to H$ επάγει οικογένεια $\varphi_x: \langle x \rangle \to H$ και το συμπέρασμα

έπεται από την (κ.ς.) του ελευ-
θέρου γινομένου. □.

<u>Πρόταση</u>: $F(X_1) \cong F(X_2)$ ανν $|X_1| = |X_2|$. Ιδιαιτέρως, η τάξη μιας ελεύθερης ομάδας δεν εξαρτάται από τη βάση που θα επιλεγεί.

<u>Αποδ.</u>: Έστω $|X_1| = |X_2|$ και $\varphi : X_1 \to X_2$ 1-1 και επί, φ^{-1}.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(X_1) \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ G & X_2 \subseteq F(X_2) \end{tikzcd}$$

Από την Κ.Σ. των ελεύθερων ομάδων υπάρχει $\tilde{\varphi}$ όπως στο σχήμα με $\tilde{\varphi}|_{X_1} = \varphi$.
Ομοίως, από Κ.Σ. των ελεύθερων ομάδων η απεικόνιση φ^{-1}.

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & F(X_2) \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\ & X_1 \subseteq F(X_1) \end{tikzcd}$$

η απεικ. φ^{-1} επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\tilde{\psi}: F(X_2) \to F(X_1)$.

Για κάθε $x_2 \in X_2$ έχουμε

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}(x_2) = \tilde{\varphi} \circ (\underbrace{\varphi^{-1}(x_2)}_{\in X_1}) = \varphi \circ \varphi^{-1}(x_2) = x_2$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = id_{F(X_2)}$.

Ομοίως, $\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = id_{F(X_1)}$: δηλ.

$\tilde{\varphi}: F(X_1) \to F(X_2)$ ισομορφισμός με αντίστροφη $\tilde{\psi}$.

$$F(X_1) \cong F(X_2)$$

Αντίστροφα, $F(X_1)_{\alpha\beta} \cong F(X_2)_{\alpha\beta}$ δηλ.

Τότε

$$F(X_1) / F'(X_1) \cong F(X_2) / F'(X_2).$$

Από πρώτη άσκηση

$$\Rightarrow \left(\underset{x \in X_1}{*} \mathbb{Z} \right)_{\alpha\beta} \cong \left(\underset{x \in X_2}{*} \mathbb{Z} \right)$$

$\to \bigoplus_{X_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{X_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\to \underbrace{\bigoplus_{X_1} \mathbb{Z}}_{\text{ελεύθερη αβελ. επί } X_1} \cong \underbrace{\bigoplus_{X_2} \mathbb{Z}}_{\text{ελεύθερη αβελ. επί το } X_2} \to |X_1| = |X_2|$

Πρόταση: Έστω $X \subseteq G$, G ομάδα

τ.α.ε.ι.

① G ελεύθερη με βάση X.

② Κάθε στοιχείο με τετρ. $G \ni g \neq 1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, $x_{i_j} \in X$

$\varepsilon_j \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_j \neq 0$ και $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}$ $\forall j$ ⊛

③ G παράγεται από το X και το 1 δεν μπορεί να εκφραστεί όπως ⊛.

απόδ: Προκύπτει άμεσα από αντίστοιχη πρόταση για ελεύθερα γινόμενα.

□.