Άλγεβρα Ι — Μάθημα 18. 07/12/2022. (1)

Αν $R \subseteq$ ομάδας G, τότε με $\langle\langle R \rangle\rangle$ συμβολίζουμε την κανονική υποομάδα που παράγεται από το R, δηλ. την μικρότερη κανονική υποομάδα που περιέχει το R = τομή όλων των κανονικών υποομ. που περιέχουν το R. = $R^{\pm 1}$ = γινόμενα συζυγών της $R^{\pm 1}$ =

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(f_i^{-1} r_i^{\varepsilon_i} f_i \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ f_i \in G,\ \varepsilon_i \in \{0,1\},\ r_i \in R \right\}$$

Ορσ Έστω X σύνολο και $F(X)$ η ελεύθερη ομάδα επί του X.

(1) Έστω $R \subseteq F(X)$. Η ομάδα με παράσταση $\langle X \mid R \rangle$ ορίζεται να είναι η ομάδα $F(X) / \langle\langle R \rangle\rangle$

Διαφορετικά λέμε ότι η ομάδα G έχει παράσταση $\langle X \mid R \rangle$ αν $G \cong F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$

$$G = \langle X \mid R \rangle = F(X) / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

② Λέμε ότι G είναι πεπερασμένα ② παραγόμενη αν $G = \langle X \mid R \rangle$ με X πεπερασμένο.

③ Επιπλέον, αν X, R είναι πεπερασμένα, τότε η G λέγεται πεπερασμένα παριστώμενη.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε ομάδα G έχει παράσταση (είναι επιμορφική εικόνα ελεύθερης.)

<u>απόδ</u> Έστω X σύνολο γεννητόρων της G και $\tilde{X}$ ένα σύνολο. τ.ω.

$$\tilde{X} \xleftrightarrow{1\text{-}1,\ \text{επί}} X$$
$$\tilde{x} \longmapsto x$$

Θεωρούμε την ελεύθερη $F(\tilde{X})$ επί του $\tilde{X}$. Από την καθολική ιδιότητα των ελεύθερων ομάδων η $\tilde{x} \mapsto x$ επεκτείνεται σε ομομορφισμό $\varphi : F(\tilde{X}) \to G$, ο οποίος είναι επί αφού $\mathrm{Im}\varphi$ περιέχει το σύνολο γεννητόρων της G.

$\Rightarrow F(\tilde{X})/_{\ker\varphi} \cong G$ και θεωρούμε ως $R = G$ □.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$ και H δύο ομάδες και $\varphi : X \to H$ η απεικόνιση την οποία επεκτείνουμε στο $X^{\pm 1}$ ορίζοντας $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ $\forall x \in X$.

Υποθέτουμε ότι $\forall\, r = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_k^{\varepsilon_k} \in R$ (<u>όχι</u> αναγκαστικά μοναδική γραφή) $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$: $\varphi(x_1)^{\varepsilon_1} \cdots \varphi(x_k)^{\varepsilon_k} = 1$.

Τότε η απεικόνιση φ επεκτείνεται σε <u>μοναδικό</u> ομομορφισμό

$\tilde{\varphi} : G \to H$

<u>απόδ</u> Ορίζουμε $\varphi(x_1 \cdots x_k) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_k)$ ομομορφ: $F(X) \to H$

$\Rightarrow R \subseteq \ker\varphi$ από υποθ, άρα από καθολική ιδιότητα ομάδας πηλίκο. $\exists!\ \tilde{\varphi} : G \to H$ ομομορφ. επεκταση ως φ. □.

Παραδείγματα :

(1) $F(x) = \langle x \mid \varnothing \rangle$.

(2) $\mathbb{Z}^n = \langle x_1, \dots, x_n \mid [x_i, x_j] = 1, \forall i, j \rangle$.

Εστω $F = F(x_1, \dots, x_n)$ η ελεύθερη επί του $\{x_1, \dots, x_n\}$ και

$N = \langle\langle \underbrace{[x_i, x_j]}_{R}, \forall i,j \rangle\rangle$. μετάθετες στην F

Εστω $\mathbb{Z}^n = \underset{\langle \bar{x}_1 \rangle}{\mathbb{Z}} \times \dots \times \underset{\langle \bar{x}_n \rangle}{\mathbb{Z}}$.

Από την προηγούμενη πρόταση η απεικόνιση $x_i \mapsto \bar{x}_i$ επάγει επιμορφισμό $\varphi : F/N \to \mathbb{Z}^n$.

• $[x_i, x_j] \in N \Rightarrow$ οι γεννήτορες $x_i N$ της F/N μετατίθενται, άρα η F/N είναι αβελιανή. Συνεπώς κάθε στοιχείο είναι της μορφής $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} N$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$.

$x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \xleftrightarrow{\times N}$

Αν xN εκεργ. τοτε $\varphi(xN)=1$ ⑤

$\Rightarrow \overline{x_1}^{\varepsilon_1} \cdots \overline{x_n}^{\varepsilon_n} = 0 \Rightarrow \varepsilon_i = 0, \forall i$

$\Rightarrow xN = 1$ και φ ισομορφισμός.

$\Rightarrow \mathbb{Z}^n = F(x_1, \dots, x_n) / \langle\langle [x_i, x_j] \rangle\rangle$

(β) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$

$\quad\;\; \| \qquad\;\; \|$

$\langle \alpha \rangle \quad \langle \beta \rangle$.

Εστω $F(\alpha, \beta) = F$ και $R = \{\alpha^2, \beta^2, [\alpha, \beta]\}$.

$N = \langle\langle R \rangle\rangle$. Άρα F/N είναι αβελιανή, αφού οι γεννήτορες αN, βN μετατίθενται. $([\alpha, \beta] \in N)$

$\Rightarrow |F/N| \leq 4$. Η απεικόνιση

$\alpha \mapsto \overline{\alpha}$
$\beta \mapsto \overline{\beta}$ επάγει επιμορφισμό $F/N \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$\Rightarrow |F/N| = 4$ και φ ισομορφισμός (αρχή του περιστερώνα).

$\Rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong F/N = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 1 \rangle$.

(4) $\mathbb{Z}_n = \langle x \mid x^n = 1 \rangle$.

($\mathbb{Z}_n = \langle \bar{x} \rangle$ και $F(x) = \{ x^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Ορίζουμε $R = \{ x^n \}$.

$x \mapsto \bar{x}$ επάγει <u>επιμορφ.</u>

ισομορφ.

$\underbrace{F(x)/\langle\langle R \rangle\rangle}$ $\to \mathbb{Z}_n$. ←

κυκλική με $|F/\langle\langle R \rangle\rangle| \leq n$.)

(5) $D_n = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = 1,\ \beta^2 = 1,\ \alpha^{-1}\beta\alpha = \beta^{-1} \rangle$

(6) Υπ. $G_1 = \langle X_1 \mid R_1 \rangle$

$G_2 = \langle X_2 \mid R_2 \rangle$

$\Rightarrow G_1 * G_2 = \langle X_1 \sqcup X_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$.

<u>Λήμμα</u> (Ping-Pong).

Έστω G μια ομάδα, η οποία δρα επί ενός συνόλου Ω και $H_1, H_2 \leq G$ με $|H_1| \geq 3$, $|H_2| \geq 2$.

Έστω $H = \langle H_1, H_2 \rangle$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $S_1, S_2 \subseteq \Omega$ μη κενά τ.ω $S_2 \not\subseteq S_1$ · $\alpha S_2 \subseteq S_1$, $\forall \alpha \in H_1 \setminus \{1\}$

· $\beta S_1 \subseteq S_2$, $\forall \beta \in H_2 \setminus \{1\}$.

$\Rightarrow H \cong H_1 * H_2$

<u>απόδειξη</u>: Αυ.σ.ο. κάθε ανηγμέ-νη λέξη ως προς H_1, H_2 είναι $\neq 1$.

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώ-σεις

(α) $w = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \cdots \alpha_{n-1} \beta_{n-1} \alpha_n$. $\alpha_i \in H_1 \setminus \{1\}$, $\beta_i \in H_2 \setminus \{1\}$

$\Rightarrow w S_2 = (\alpha_1 \beta_1 \cdots \beta_{n-1} \alpha_n) S_2$

$\subseteq \alpha_1 S_2 \subseteq S_2$

Εφόσον $S_2 \not\subseteq S_1 \Rightarrow w \neq 1$.

(β) $w = \beta_1 \alpha_1 \cdots \beta_n \alpha_{n-1} \beta_n$. $\alpha_i \in H_1 \setminus \{1\}$, $\beta_i \in H_2 \setminus \{1\}$

Για $\alpha \in H_1 \setminus \{1\} \Rightarrow$

$\alpha w \alpha^{-1} = \alpha \beta_1 \cdots \beta_n \alpha^{-1}$ και αναγό-μαστε στην 1η περίπτωση

(γ) $w = \alpha_1 \beta_1 \cdots \alpha_n \beta_n$.

Εφόσον $|H_1| \geq 3$ μπορώ να επιλέξω $a \in H_1 \setminus \{1, a_1^{-1}\}$.

$\Rightarrow a w a^{-1} = \underbrace{a a_1}_{\in H_1 \setminus \{1\}} \beta_2 \cdots \alpha_n \beta_n a^{-1}$

και από την (α) $\Rightarrow a w a^{-1} \neq 1 \Rightarrow w \neq 1$.

(δ)

- $w = \gamma_1 a_1 \cdots \gamma_n a_n$.

$\Rightarrow \gamma_1^{-1} w \gamma_1$, ανάγοντας στο (γ) και έχουμε το ζητούμενο $\square$.

<u>Παράδειγμα</u>:

Οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ παράγουν την ελεύθερη ομάδα τάξης 2 στην $SL_2(\mathbb{Z})$.

$$H_1 = \langle A \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_2 = \langle B \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}.$$

Θεωρούμε την φυσική δράση

$SL_2(\mathbb{Z})$ στο $\mathbb{R}^2$. και

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| > |y| \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| < |y| \right\} \not\subseteq S_1$$

Ν.δ.ο. $(H_1 \setminus \{1\}) S_2 \subseteq S_1$ και

$(H_2 \setminus \{1\}) S_1 \subseteq S_2$

Έστω $k \neq 0$ και $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x + 2ky \\ y \end{pmatrix}}_{\in S_1}$$

αφού $|2k + x| \geq |2ky| - |x| > 2k|y| - |y| > |y|$.

Όμοιως $(H_2 \setminus \{1\}) S_1 \subseteq S_2$

Από το προηγούμενο λήμμα

$$\langle A, B \rangle = \langle A \rangle * \langle B \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2.$$