Άλγεβρα Ι Μάθημα (21/12/2022) ①

$F_2 \hookrightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ (δείτε προηγούμενο μάθημα)

Θεώρημα (Tits)

Μια πεπερ. παραγόμενη γραμμική ομάδα (δηλ. $\leq GL_n(F)$, F σώμα) είτε περιέχει επιλύσιμη ομάδα πεπερ. δείκτη είτε μη-αβελιανή ελεύθερη.

Σημείωση: Μπορεί να δειχθεί ότι κάθε υποομ. ~~αβελιανής~~ ελευθέρως είναι ελεύθερη.

επ.

Ορσ: Μια G λέγεται προσεγγιστικά πεπερασμένη αν $\forall 1 \neq g \in G$

- $\exists K$ πεπερασμένη ομάδα και
- $\varphi : G \to K$ ομομορφ. τ.ω. $\varphi(g) \neq 1$.

Πρόταση Τ.α.ε.ι.

① G είναι προσεγγιστικά πεπερ.

② $\forall 1 \neq g \in G$, $\exists N \trianglelefteq G$ με $[G:N] < \infty$ και $g \notin N$

③ $\forall 1 \neq g \in G, \exists H \leq G$ με $[G:H] < \infty$ ②
και $g \notin H$

④ η τομή όλων των υποομάδων
πεπερ. δείκτη είναι τετριμμένη.

⑤ η τομή όλων των κανονικών υποο-
μάδων πεπερ. δείκτη είναι τετριμμένη.

<u>αποδ</u>: ① $\to$ ② για φ όπως στο
ορσ θεωρούμε $N = \ker\varphi$.

② $\to$ ③ ✓ ③ $\to$ ④ ✓

④ $\to$ ⑤ κάθε υποομάδα πεπερ. δείκτη
περιέχει κανονική υποομάδα πεπερ. δείκτη

⑤ $\to$ ① αν $\bigcap N = \{1\}$ και $1 \neq g \in G$
$\Rightarrow g \notin \bigcap N \to \exists N \trianglelefteq G, [G:N] < \infty$
τ.ω $g \notin N$. Θεωρούμε την κανονική
προβολή $\pi : G \to G/N$. □

<u>Πρόβλημα της λέξεως</u>

Έστω $G = \langle X \mid R \rangle$, X, R πεπερ.
(δηλ. G είναι πεπερασμένα παριστώ-
μενη)

Υπάρχει αλγόριθμος ο οποίος ③
για μια δοθείσα λέξη w στο $X^{\pm 1}$
να αποφαίνεται πότε ή όχι αυτή η
λέξη αναπαριστά τετριμμένο ή μη
στοιχείο της ομάδας G ;

<u>Παράδειγμα:</u>

Αν $G = \langle X | \varnothing \rangle$ ελεύθερη και
$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ πεπερ., τότε το πρόβλημα της λέξης είναι επιλύσιμο.

Έστω $w = w(x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1})$ μια λέξη στο $X^{\pm 1}$ θετικού μήκους.

① Αν <u>δεν</u> υπάρχουν αναγωγές
$\Rightarrow w \neq 1$ (ως ανηγμένη λέξη θετικού μήκους).

② Αν υπάρχει αναγωγή, τότε η λέξη w' που προκύπτει με στοιχειώδη αναγωγή ($\cancel{xx^{-1}}$, $\cancel{x^{-1}x}$) αναπαριστά το ίδιο στοιχείο της ομάδας με την αρχική w και έχει μικρότερο μήκος.

Έπειτα από πεπερ. πλήθος βημάτων είτε θα βρούμε +1 ή 1.

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\mathbb{Z}^2 = \langle \alpha, \beta \mid [\alpha, \beta] = 1 \rangle$$

$$= \langle \underbrace{(\alpha, 0)}_{\mathbb{Z}} \rangle \times \langle \underbrace{(0, \beta)}_{\mathbb{Z}} \rangle$$

Μια λέξη $w = w(\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1})$
αναπαριστά το τετρ. στοιχείο $\Leftrightarrow$
το άθροισμα των εκθετών του α
= " " " " $\beta = 0$.

Γενικά το πρόβλημα της λέξης είναι άλυτο.

<u>Θεώρημα</u> Το πρόβλημα της λέξης είναι επιλύσιμο για πεπερ. παριστώμενες προσεγγιστικά πεπερ. ομάδες.

<u>Θεώρημα</u> Μια πεπερ. παραγόμενη προσεγγιστικά πεπερ. ομάδα, πεπερ. εκθέτη (δηλ. υπάρχει $N \lhd G$ τ.ω.

$g^n=1, \forall g\in G, n\in \mathbb{N}$) είναι πε-

περασμένη.

<u>Παρατηρήσεις</u>

① Αν G προσεγγιστικά πεπερ.

$H \leq G \Rightarrow H$ προσεγγ. πεπερ.

② Αν H πεπερ. δείκτη στην G και

H προσεγγιστικά πεπερ.

$\Rightarrow G$ προσεγγιστικά πεπερ.

<u>αποδ</u> ① άμεσο ② Έστω $1 \neq g \in G$.

(i) αν $H \not\ni g$ ✓

(ii) αν $H \ni g \neq 1 \Rightarrow$ υπάρχει

$N \leq H$ πεπερ. δείκτη στην H τ.ω.

$g \notin N \Rightarrow N \leq G$ π.πεπερ. δείκτ.

$g \notin N$. ✓

<u>Παράδειγμα</u>: $\mathbb{Z}$ είναι προσεγγισ-

τικά πεπερ.

<u>αποδ</u> Έστω $0 \neq m \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε

p πρώτο $p \nmid m$ και $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$.

$\Rightarrow \pi(m) \neq 0$, από την επιλογή του p.

Πρόταση: Η $GL_n(\mathbb{Z})$ είναι προσεγγιστικά πεπερ.

απόδ: Έστω $I_n \neq A \in GL_n(\mathbb{Z})$ με $A = (a_{ij})$. Θεωρούμε $m \in \mathbb{Z}$ την. $m > |a_{ij}|$, $\forall i, j$ και $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ τον φυσικό επιμορφ. (δακτυλίων)

φ επάγει ομομορφ. $\tilde{\varphi} : GL_n(\mathbb{Z}) \to \underbrace{GL_n(\mathbb{Z}_m)}_{\text{πεπερ}}$ με $\varphi(A) \neq I$ από την επιλογή του m.

□.

Πρόταση: Κάθε ελεύθερη ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερ.

απόδ: • η ελεύθερη τάξης 2 είναι προσ. πεπερ. αφού $F_2 \hookrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \leq GL_2(\mathbb{Z})$. ως υποομ. προσ. πεπερ.

• αν $F(\alpha, \beta) = F_2$, τότε η υποομ. της F_2, $\langle \alpha, \beta\alpha\beta^{-1}, \beta^2\alpha\beta^{-2}, \ldots, \beta^k\alpha\beta^{-k} \rangle$. είναι ελεύθερη

κάθε ανηγμένη λέξη είναι (7)
↳ μη-τετρ.

$\neq 1$)

$\Rightarrow$ αν $X = \{\alpha, \beta\alpha\beta^{-1}, \dots, \beta^{k}\alpha\beta^{-k}\}$.

ΕΧΟΥΜΕ $F(X_1) = F_{k+1}$.

- Αν $|X| = \mathbb{N} \Rightarrow \langle \alpha, \beta^{k}\alpha\beta^{-k} \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \cong F(X)$.

Αφού F_2 είναι προσεγγιστικά πεπερ

$\Rightarrow F_{k+1}, F_{\mathbb{N}}$ είναι προσ. πεπερ.

- Εστω ότι X είναι υπεραριθμ.

και έστω $1 \neq y \in F(X)$.

Το y εμπλέκει πεπερ το πλήθος

γεννήτορες $x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \in X$.

Εστω $Y = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$. Τότε

από την (Κ.Σ) υπάρχει επιμορφ.

$$F(X) \xrightarrow{\varphi} F(Y). \qquad x_{i_j} \longmapsto x_{i_j},\ j=1,\dots,n$$

$$X \setminus Y \ni x \longmapsto 1.$$

$\Rightarrow \varphi(y) \neq 1$.

$F(\Upsilon)$ προσ. πεπερ. $=6$

για το $\varphi(g) \neq 1$ υπάρχει

$\psi : F(\Upsilon) \to K$ πεπερ. τ.ω.

$\psi(\varphi(g)) \neq 1$. Θεωρώντας την $\psi \circ \varphi$

έχουμε το ζητούμενο $\square$.