Άλγεβρα I — Μάθημα 20ο

(14/12/2022)

Παραδείγματα:

① Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι προσ. πεπερ.

② $\mathbb{Z}$ προσ. πεπερ.

③ $G_1, \dots, G_n$ προσ. πεπερ. $\Rightarrow$

$G_1 \times \dots \times G_n$ προσ. πεπερ.

αποδ. Έστω $g = g_1 \cdots g_n$ μοναδική γραφή
$\neq 1$

$\Rightarrow$ $g_{i_0} \neq 1$,
G_{i_0} προσ. πεπερ. $\Big\} \Rightarrow$ υπάρχει ομομ.

$\varphi : G_{i_0} \to K$ πεπερ. τω $\varphi(g_{i_0}) \neq 1$.

$$G_1 \times \dots \times G_n \xrightarrow{\pi_{i_0}} G_{i_0} \xrightarrow{\varphi} K$$

$\Rightarrow$ $\varphi \circ \pi_{i_0}(g) \neq 1$.

④ Κάθε πεπερ. παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι προσεγγιστικά πεπερ.

αποδ: αν G π.π. αβελιανή είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών. (①, ②, ③) ⑤ Η $G = (\mathbb{Q}, +)$ δεν είναι προσ. πεπερασμένη. ②

Πράγματι, κάθε ομομορφ.

$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow K$, με $|K| = n < \infty$.

είναι τετρ.

$$\varphi(d) = \varphi\left(n \frac{d}{n}\right) = \varphi^{n}\left(\frac{d}{n}\right) = 1.$$

<u>Πρόταση</u>:

$\left.\begin{array}{l} G \text{ προσεγγιστικά πεπερ.} \\ G \text{ πεπερ. παραγ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Aut(G) \\ \text{προσ. πεπερ.} \end{array}$

<u>αποδ</u>: Έστω $id \neq \varphi \in Aut(G)$.

$\Rightarrow \exists g \in G : \varphi(g) \neq g \Rightarrow g^{-1}\varphi(g) \neq 1$.

$\Rightarrow \exists N \trianglelefteq G : [G:N] < \infty$ και $g^{-1}\varphi(g) \notin N$.

• G πεπερ. παραγ. .

$\Rightarrow \exists K \subseteq N$ <u>χαρακτηριστική</u>. πεπερ.

δεικτ. $(\Rightarrow g^{-1}\varphi(g) \notin K)$

Έστω $u \in \mathrm{Aut}(G)$ τότε

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/K \arrow[r, "\tilde{u}"] & G/K \end{tikzcd}$$

$G \xrightarrow{\pi \circ u} G/K$.

Όμως K χαρακτ.

$\Rightarrow u(K) \subseteq K$

$\Rightarrow K \subseteq \ker(\pi \circ u)$

$\Rightarrow$ υπάρχει $! \ \tilde{u} : G/K \to G/K$ *

τ.ω. το παραπάνω διάγραμμα να είναι μεταθετικό. * $\tilde{u}$ ισομορφ.

Ορίζουμε ομομορφισμό

$\varphi : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G/K)$

$u \mapsto \tilde{u}$

$\Rightarrow \varphi(f)(g) = \tilde{f}(gK) = f(g)K \neq gK$

$\Rightarrow \varphi(f) \neq 1$. και $\mathrm{Aut}(G/K)$ είναι πεπερ. αφού G/K πεπερ. $\square$

<u>Πρόταση</u>: Αν $G_1, \ldots, G_r$ προσ. πεπερ.

$\Rightarrow G = G_1 * \cdots * G_r$ είναι προσ. πεπερ.

απόδ. 1η περίπτωση:

G_i πεπερασμένη, $\forall i = 1, \dots, \nu$

Έστω $g = g_{i_1} \cdots g_{i_n} + 1$ η ανηγμένη μορφή του G

W = το σύνολο των ανηγμένων λέξεων $\coprod_i G_i$ (όπως ορσ). και

$W_n \subseteq W$ το σύνολο των ανηγμένων λέξεων μήκους $\leq n$.

- $\forall \alpha = 1, \dots, \nu$ ορίζουμε

$\varphi_\alpha : G_\alpha \to S(W_n)$

($S(W_n)$ το σύνολο μεταθέσεων του W_n)

με $\varphi_\alpha(1) = id_{W_n}$ και αν $1 \neq g_\alpha \in G_\alpha$

$\varphi_\alpha(g_\alpha)(w) =$ η ανηγμένη λέξη που προκύπτει από την $(g_\alpha, w_1, \dots, w_k)$, $w = (w_1, \dots, w_k)$

αν αυτή έχει μήκος $\leq n$

Αλλιώς, $\varphi_\alpha(g_\alpha)(w) = w$.

Από (κ.σ.) ελευθέρων γινομέ- (5)
νως υπάρχει! $\tilde{\varphi}: G \to S(w_n)$
πεπερ.

με $\varphi(g) \neq id$

$\left(\varphi(g)(\phi) = (g_{i_1} \cdots g_{i_m}) \neq \phi \right)$

__2η περίπτωση :__

G_i δεν είναι απαραίτητα πεπερασμένες. $\forall i$.

Έστω $g = g_{i_1} \cdots g_{i_m}$. ανηγμένη μορφή.

Ιδιαιτέρως, $g_{i_j} \neq 1$, $\forall j = 1, \dots, m$.

Αφού G_{i_j} είναι προσ. πεπερ.

$\Rightarrow \exists\, \varphi_{i_j}: G_{i_j} \to \tilde{G}_{i_j}$ πεπερ. τ.ω.

$\varphi_{i_j}(g_{i_j}) \neq 1$.

Έτσι ώστε $\varphi_{i_j} = \varphi_{i_l}$ αν $G_{i_j} = G_{i_l}$.

(Έστω Γ προσ. πεπερ, $x_1, \dots, x_k \neq 1$ στην Γ.

$\Rightarrow \exists\, H_i \trianglelefteq \Gamma$ πεπερ. δεικτ. τ.ω. ⑥

$x_i \notin H_i$, $\forall i=1\ldots k$. Έστω

$$H = \bigcap_{i=1}^{k} H_i \text{ πεπερ. δεικτ.}$$

$\Rightarrow x_i \notin H$, $\forall i=1\ldots k$. άρα ορίζεται

ομομορφ. $\varphi : G \longrightarrow G/H$ (πεπερ.

τ.ω. $\varphi(x_i) \neq 1$, $\forall i = 1, \ldots k$.)

Από την κ.ς. των ελευθέρων

γινομένων επάγεται ομομορφ.

$\varphi : G \longrightarrow \ast_j \widetilde{G}_{ij}$ με

$$\varphi(g) = \widetilde{g}_{i_1} \cdots \widetilde{g}_{i_k} \neq 1.$$

Όμως, από την 1η περίπτωση

$\ast_j \widetilde{G}_{ij}$ είναι προσ. πεπερ.

$\Rightarrow \exists\, \psi : \ast_j \widetilde{G}_{ij} \to K$ πεπερ. τ.ω.

$\psi \circ \varphi(g) \neq 1$.

$$G \xrightarrow{\varphi} \ast_j G_{ij} \xrightarrow{\psi} K \qquad \square$$

Αν είχα I άπειρο και (φ)

$\underset{i\in I}{*} G_i$, G_i πρόσ. πεπερ. $\forall i$

$1 \neq g = g_{i_1} \cdots g_{i_n}$ ανηγ. μορφή

$\rightarrow$ g_{i_j} ανήκουν σε πεπερ. πλήθος παραγόντων. $G_{\nu_1}, \ldots, G_{\nu_k}$.

$\nu_\lambda \in I$

$\rightarrow$ $\underset{i\in I}{*} G_i \longrightarrow \underset{\text{προσ. πεπερ.}}{G_{\nu_1} * \cdots * G_{\nu_k}}$

($G_{\nu_1} * \cdots * G_{\nu_k}$ είναι ισόμορφο με πηλίκο της $\underset{i}{*} G_i$)

<u>Ελεύθερα Γινόμενα με Αμάλγαμα.</u>

X τοπολογικός χώρος

$X = X_1 \cup X_2$, με X_i ανοικτά και κατά τόξα συνεκτικά. και $\underbrace{X_1 \cap X_2}_{Y} \neq \varphi$

• Y κατά τόξα συνεκτικό

Έστω $x_0 \in Y = X_1 \cap X_2$.

Υποθέτω ότι οι ενθέσεις

$$X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_1 \qquad X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_2$$

επάγουν μονομορφισμούς.

$$\varphi_1 : \pi_1\left(X_1 \cap X_2, x_0\right) \longrightarrow \pi_1\left(X_1, x_0\right)$$

$$\varphi_2 : \pi_2\left(X_1 \cap X_2, x_0\right) \longrightarrow \pi_1\left(X_2, x_0\right)$$

(π_1 ως η θεμελιώδης ομάδα.)

Από το θεώρημα <u>Seifert - Van</u> <u>Kampen</u>:

$$\pi_1\left(X, x_0\right) = \left(\pi_1\left(X, x_0\right) * \pi_1\left(X_2, x_0\right)\right) / N$$

$$N = \langle\langle \left(\varphi_1(\sigma)\right)^{-1} \varphi_2(\sigma) \mid \sigma \in \pi_1\left(Y, x_0\right) \rangle\rangle.$$