① **Άλγεβρα Ι** Μάθημα 21ο.

Το θεώρημα Seifert-Van-Kampen δεν απαιτεί φ_1, φ_2 να είναι μονομορφισμοί.

Αν είναι όμως $\pi_1(X_1, x_0)$, $\pi_1(X_2, x_0)$ εμφυτεύονται στην $\pi_1(X, x_0)$.

Ορ: Έστω G_λ, $\lambda \in \Lambda$ μια οικογένεια ομάδων, μια ομάδα H και μια οικογένεια μονο- $\varphi_\lambda : H \to G_\lambda$ μια οικογένεια μορφισμών.

Το ελεύθερο γινόμενο των G_λ με αμαλγαματοποιημένη υποομάδα H είναι η ομάδα πηλίκο.

$$\ast_H G_\lambda = \ast_\lambda G_\lambda / N \quad \text{όπου}$$

$$N = \langle\langle \varphi_\lambda(h)(\varphi_\mu(h))^{-1} \mid \lambda, \mu \in \Lambda,\ h \in H \rangle\rangle$$

Οι ομάδες G_λ λέγονται ②
<u>Παράγοντες</u> του ελεύθερου γινομένου με αμάλγαμα.

Στην περίπτωση που $\Lambda = \{1, 2\}$

συμβ. $G_1 \underset{H}{*} G_2$ ή $G_1 * G_2$
$\varphi_1(H) = \varphi_2(H)$.

Η ομάδα $\underset{H}{*} G_\lambda$ εξαρτάται από τους μονομορφισμούς φ_λ.

<u>Παραδείγματα</u>

(α) • $\langle \alpha \rangle \underset{\mathbb{Z}}{*} \langle \beta \rangle \cong \mathbb{Z}$.
$\alpha = \beta \rangle$.

• Έστω $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{*} \mathbb{Z}$.

$\langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle \ni \alpha^{\varepsilon_1} \beta^{\lambda_1} \cdots \alpha^{\varepsilon_r} \beta^{\lambda_r}$

$\longmapsto \bar{\alpha}^{\sum_{i=1}^{r} (\varepsilon_i + \lambda_i)} \in \langle \bar{\alpha} \rangle$.

Μπορεί να δειχθεί ότι $o(\bar{\alpha}) = \infty$

(β) $\langle \alpha \rangle * \langle \beta \rangle \not\cong \mathbb{Z}$, $\langle \alpha \rangle \cong \langle \beta \rangle$
$\alpha \; \alpha^2 = \beta^2 \rangle$. $\cong \mathbb{Z}$.

αν $\alpha\alpha\gamma * \alpha\beta\gamma \cong \alpha\gamma\gamma \cong \mathbb{Z}$. ③

$\alpha\alpha \cong \beta\alpha\gamma$.

$\to \bar{\alpha} = \gamma^{r}$. λr. $\mu \neq r$

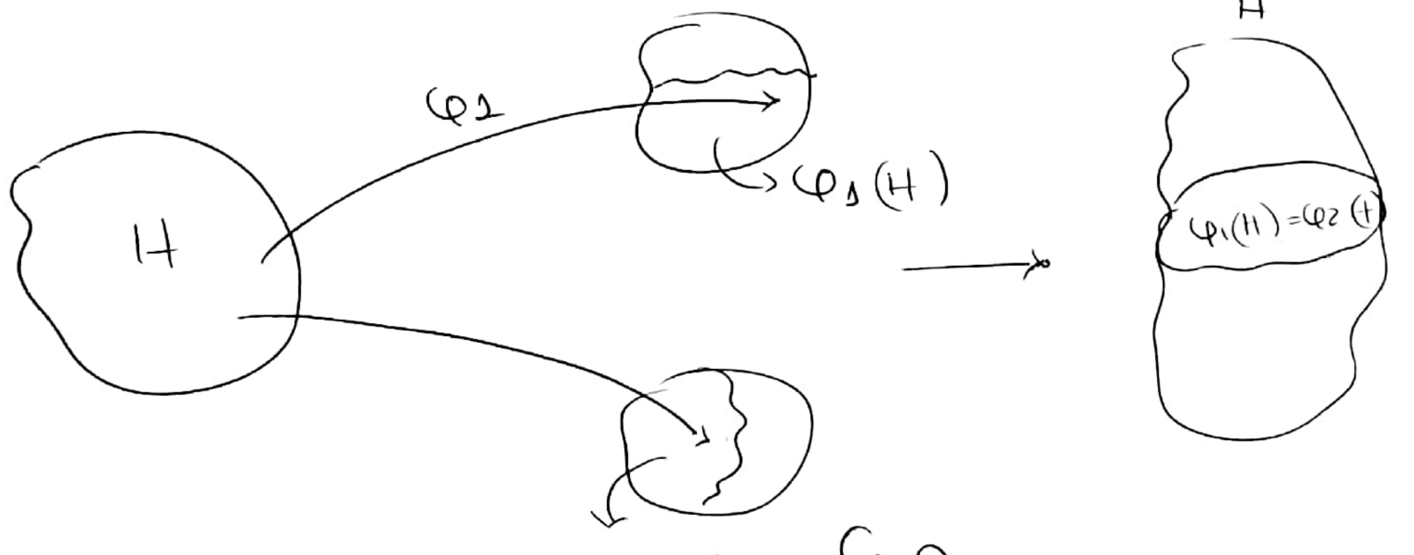
$\bar{\beta} = \gamma^{\mu} \Rightarrow o(\gamma) < \infty$. ΑΤΟΠΟ

(ΑΤΟΠΟ).

$\to \mu = r \Rightarrow \bar{\alpha} = \bar{\beta}$

(•) $\varphi_\lambda(x) = \varphi_\mu(x)$ στην $*_H G_\lambda$.

$\lambda, \mu \in \Lambda$, $x \in H$



Μπορούμε επίσης $H \leq G_1$ και

$\varphi: H \hookrightarrow G_2$, $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$

$: \varphi_1(H) \hookrightarrow G_2$

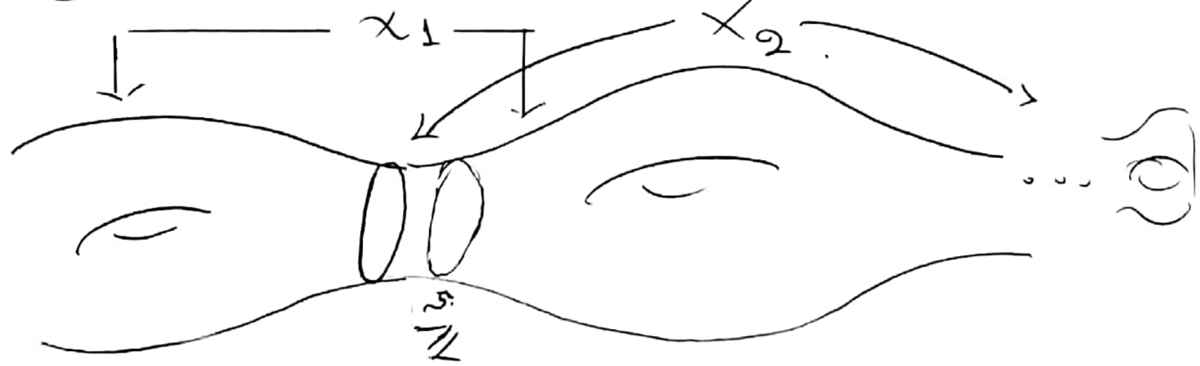
δηλ. ταυτίζουμε $H = \varphi_1(H)$.

Παραδείγματα.

① Κάθε ελεύθερο γινόμενο είναι είναι ελεύθερο γινόμενο με αμάλγαμα $H = \{1\}$.

② Έστω S_g η κλειστή προσανατολισμένη επιφάνεια γένους $g \geq 2$.

$$S_g = T \# T \# \cdots \# T.$$

$S_g =$ 

$$\pi_1(S_g) = F_2 \underset{\mathbb{Z}}{*} F_{2(g-1)}.$$

③ $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_4.$

όπου $\mathbb{Z}_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

$\mathbb{Z}_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathbb{Z}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Κανονικές Μορφές

Έστω G_1, G_2 δύο ομάδες.
H μια τριτη. και $\varphi_i : H \to G_i$
μονομορφισμοί.
- Μπορούμε να θεωρήσουμε $H \leq G_1$
και $\varphi : H \to G_2$ μονομορφ.
$(\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$

Θεωρούμε το φυσικό επιμορφισμό

$$\pi : G_1 * G_2 \to G_1 \underset{H}{*} G_2.$$

Έστω $g \in G_1 * G_2$.
Εφόσον $G_1 * G_2$ παράγεται
από τους G_1, G_2 $\left.\begin{matrix} \\ \pi \text{ επι} \end{matrix}\right\} \to$

g γράφεται ως

$$g = \pi(g_1) \ldots \pi(g_n), \quad g_i \in G_1 \cup G_2$$

Από αυτές τις εκφράσεις θεωρού

με μία ελάχιστου μήκους.

$g = \pi(x_1) \cdots \pi(x_n)$, $x_i \in G_1 \cup G_2$.

Τότε διαδοχικά x_i ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες.

Επίσης εάν $n=1$, $x_i \in H \cup \varphi(H)$ και $g \in \pi(H)$.

<u>Ιδέα</u>: Να χρησιμοποιήσουμε μοναδικότητα κανονικών μορφών σε ελεύθερα γινόμενα για να βρούμε κάτι αντίστοιχο σε ελεύθερα γινόμενα με αμάλγαμα.

- Στη μορφή (1) έχουμε μοναδικότητα mod H.

Έστω

T_1 σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλ. H στη G_1.

T_2 " " " $\varphi(H)$ στη G_2

τ.ω. $1_{G_1} \in T_1$ και $1_{G_2} \in T_2$. (Ψ)

Όπως πριν. για $g \in G_1 \underset{H}{*} G_2$

με $g \notin \pi(H)$ έχουμε ότι

$g = \pi(x_1) \cdots \pi(x_n)$ όπου $x_i \in G_1 \cup G_2$

διαδοχικά x_i ανήκουν σε διαφορ. παρ.

και κάθε $x_i \notin H \cup \varphi(H)$.

υποθέτουμε $x_1 \in G_1, \ x_n \in G_2$.

$\Rightarrow \exists \, \bar{x}_n \in T_2 \setminus \{1\}: \ x_n = \varphi(u_n) \bar{x}_n$.

$\Rightarrow \ g = \pi(x_1) \cdots \pi(x_n) = \pi(x_1) \cdots \pi\,\varphi(u_n)\, \pi(\bar{x}_n)$

$= \pi(x_1) \cdots \pi(x_{n-1})\, \pi(u_n)\, \pi(\bar{x}_n)$

$= \pi(x_1) \cdots \pi(\underbrace{x_{n-1} u_n}_{\in G_1})\, \pi(\bar{x}_n)$

* $x_{n-1} u_n = u_{n-1} \bar{x}_{n-1}, \ \bar{x}_{n-1} \in T_1 \setminus \{1\}$.

$= \pi(x_1) \cdots \pi(u_{n-1})\, \pi(\bar{x}_{n-1})\, \pi(\bar{x}_n)$.

$= \pi(x_1) \cdots \pi(\underbrace{x_{n-2}\, \varphi(u_{n-1})}_{\in G_2})\, \pi(\bar{x}_{n-1})\, \pi(\bar{x}_n)$

$= \cdots = \pi(\bar{x}_0)\,\pi(\bar{x}_1)\cdots\pi(\bar{x}_n)$.

$\bar{x}_1, \bar{x}_3, \ldots \in T_1 \setminus \{1\}$, $\bar{x}_0 \in H$.

$\bar{x}_2, \bar{x}_4, \ldots \in T_2 \setminus \{1\}$.

Ορσ. Μια H-κανονική μορφή είναι μια ακολουθία της μορφής $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, τ.ω.

- $x_0 \in H$
- $x_i \in T_1 \setminus \{1\}$ ή $T_2 \setminus \{1\}$ και διαδοχικοί όροι ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα αντιπροσώπων.

Ανάλογα ορίζεται η έννοια της $\varphi(H)$-κανονικής μορφής.

Θεώρημα. Κάθε στοιχείο $g \in G_1 \underset{H}{*} G_2$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$g = \pi(x_0)\cdots\pi(x_n) = \pi(x_0, \ldots, x_n)$, όπου $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ H-κανονική μορφή.

με $\pi: G_1 * G_2 \longrightarrow G_1 \underset{H}{*} G_2$

ο φυσικός επιμορφισμός.

<u>Αποδ</u> Η ύπαρξη προκύπτει από την ανάλυση πριν.

Έστω W_H το σύνολο των H-κανονικών μορφών και $W_{\varphi(H)}$ το σύνολο των $\varphi(H)$-κανονικών μορφών.

- $\varphi_*: W_H \longrightarrow W_{\varphi(H)}$

$$(x_0, \dots, x_n) \longmapsto (\varphi(x_0), \dots, x_n).$$

1-1 και επί.

(Συμβ: αν $x \in G_1 \Rightarrow x = \underline{x}\,\overline{x}$ όπου $\underline{x} \in H$, $\overline{x} \in T_1$.)

Ορίζουμε δράση της G στην W_H.

$g \in G_1$ και $w = (x_0, \dots, x_n) \in W_H$.

$$
g \cdot w = \begin{cases}
(g x_0, x_1, \dots, x_n), & g \in H \\
(\underline{g x_0}, \overline{g x_0}, \dots, x_n), & g \notin H,\ x_1 \in G_2 \\
(g x_0 x_1, x_2, \dots, x_n), & g \notin H,\ x_1 \in G_1,\ g x_0 x_1 \in H \\
(\underline{g x_0 x_1}, \overline{g x_0 x_1}, \dots, x_n), & g \notin H,\ x_1 \in G_1,\ g x_0 x_1 \notin H
\end{cases}
$$

Ορίζουμε επίσης:

$$
g(x_0) = \begin{cases}
g x_0, & g \in H \\
(\underline{g x_0}, \overline{g x_0}), & g \notin H.
\end{cases}
$$