① Άλγεβρα Ι (21/01/2022)

Μάθημα 22ο

Συνέχεια αποδείξεως

· Ύπαρξη όπως πριν.

Έστω W_H το σύνολο των H-κανονικών μορφών και $W_{\varphi(H)}$ το σύνολο των $\varphi(H)$ κ.μ.

$\varphi_* : W_H \to W_{\varphi(H)}$, $(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi(x_0), x_1, \dots, x_n)$

1-1 και επί.

Ορίζουμε δράση της G_1 στην W_H ως εξής: $g \in G_1$, $w = (x_0, \dots, x_n) \in W_H$

$g \cdot w =$
① $(gx_0, x_1, \dots, x_n)$, $g \in H$

② $(\underline{gx_0}, \overline{gx_0}, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g \notin H$, $x_1 \in G_2$

③ $(gx_0x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g \notin H$, $x_1 \in G_1$, $gx_0x_1 \in H$

④ $(\underline{gx_0x_1}, \overline{gx_0x_1}, x_2, \dots, x_n)$, $g \notin H$, $x_1 \in G_1$, $gx_0x_1 \notin H$.

Ορίζουμε επίσης: (2)

$$g(x_0) = \begin{cases} g x_0, & g \in H \\ \left(\underline{g x_0}, \overline{g x_0}\right), & g \notin H \end{cases}$$

Ανάλογα ορίζουμε δράση της G_2 στην $W_{\varphi(H)}$. Χρησιμοποιώντας τη δράση $G_2 \curvearrowright W_{\varphi(H)}$ ορίζουμε δράση $G_2 \curvearrowright W_H$ ως εξής:

$$g_2 * w = \varphi_*^{-1}\left(g_2 \cdot \varphi_*(w)\right)$$

Από την καθολική ιδιότητα ελευθέρων γινομένων οι δράσεις των παραγόντων στο W_H επεκτείνονται σε δράση $G_1 * G_2 \curvearrowright W_H$, της οποίας ο πυρήνας περιέχει την N (του αναλλοίωτου). Πράγματι, $u \in H$.

$$\varphi(u) \cdot (x_0, \dots x_n) = \varphi_*^{-1}\left(\varphi(u) \cdot (\varphi(x_0) \dots, x_n)\right)$$

$$= \varphi_*^{-1}\left(\left(\varphi(u x_0), \dots x_n\right)\right)$$

$$= (u x_0, x_1, \dots x_n) = u \cdot (x_0, \dots x_n)$$

$\Rightarrow u^{-1}\varphi(u)(x_0 \dots x_n) = (x_0 \dots x_n)$

$\Rightarrow u^{-1}\cdot\varphi(u)$ ανήκει στον πυρήνα της δράσης.

Όμως $N = \langle\langle u^{-1}\varphi(u) \mid u \in H \rangle\rangle$

$\Rightarrow N$ περιέχεται στον πυρήνα της δράσης και από την καθολική ιδιότητα της ομάδας πηλίκο επάγεται δράση: $G_1 \underset{H}{*} G_2 = G_1 * G_2 / N \curvearrowright W_H$

με $\pi(g)\circ w = g\circ w$.

Έστω τώρα $x \in G_1 \underset{H}{*} G_2$ και $x = \pi(x_0)\dots\pi(x_n)$ μια H-κανονική μορφή του. Το αποτέλεσμα της δράσης στο $(1) \in W_H$ είναι

$x\circ(1) = \pi(x_0)\dots\pi(x_n)\cdot(1)$

$= (x_0 \dots x_n)(1)$

$= (x_0 \dots x_{n-1})(1, x_n)$

$= (x_0 \dots x_{n-2})(1, x_{n-1}, x_n)$

$= \dots = x_0(1, x_1, x_2, \dots, x_n)$ (4)

$= (x_0, x_1, \dots x_n)$

κ.ο.κ.

Έπεται η μοναδικότητα της H-μορφής αφού η δράση της καθορίζεται από τη δράση στο (1).

$\square$.

<u>Παρατήρηση</u>:

Μέσω της προηγούμενης δράσης η $G_1 \underset{H}{*} G_2$ εμφυτεύεται στην $Sym(W_H)$.

<u>απόδ</u>: Πράγματι, αν $1 \neq g \in G_1 \underset{H}{*} G_2$
$(g_0, \dots, g_n)$

$\Rightarrow$ η H-κανονική μορφή που το αντιπροσωπεύει είναι μη τετριμμένη.

$(\Rightarrow g_{i_0} \neq 1$ για κάποιο $i_0)$. και έτσι

$\Rightarrow g \cdot (1) = (g_0, \dots g_n) \neq (1)$

οπότε g δρα μη-τετριμμένα.

$\square$

<u>Πόρισμα</u>: Ο κανονικός επιμορφισμός επάγει εμφυτεύσεις περιορισμένος στους παράγοντες G_1, G_2, H.

Η $G = G_1 \underset{H}{*} G_2$ παράγεται από τις εικόνες $\pi(G_1)$, $\pi(G_2)$ και

$$\pi(G_1) \cap \pi(G_2) = \pi(H) \left(= \pi(\varphi(H)) \right)$$

<u>απόδειξη</u>:

Έστω $g_1 \in G_1 : \pi(g_1) = 1$

$g_1 = \underline{g_1}\ \overline{g_1} \to \pi(g_1) = \pi(\underline{g_1})\, \pi(\overline{g_1}) = \pi(1)$

Από τη μοναδικότητα $-H$- κανονικής μορφής

$\to \underline{g_1} = \overline{g_1} = 1 \Rightarrow g_1 = 1$. Ομοίως

$G_2 \cap \ker\pi = \{1\}$.

Αφού G_1, G_2 παράγουν την G είναι άμεσο ότι οι εικόνες τους παράγουν την G.

Άμεσο ότι $\pi(H) \subseteq \pi(G_1) \cap \pi(G_2)$.

Έστω $g \in \pi(G_1) \cap \pi(G_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} g = \pi(u \cdot \bar{g}_1) \\ g = \pi(\varphi(u_1)\,\bar{g}_2) \end{array}\right\} \overset{\text{μοναδικά}}{\Longrightarrow} \bar{g}_1 = \bar{g}_2 = 1 \text{ και } u = u_1$$

$\Rightarrow g \in \pi(H)$. □

<u>Τελικά:</u> ① Κάθε στοιχείο $g \in G_1 *_H G_2$ γράφεται <u>μοναδικά</u> ως $g = \pi(x_0 \cdots x_n)$ όπου $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ H-κανονική μορφή.

② Οι παράγουσες G_1, G_2 εμφυτεύονται στην $G_1 *_H G_2$ και άρα μπορούν να θεωρηθούν ως υποομάδες της.

③ $G_1 *_H G_2$ παράγεται από τους παράγουσες (τα αντίτυπά τους) και

$$\pi(G_1) \cap \pi(G_2) = \pi(H) = \pi(\varphi(H)).$$

<u>HNN επεκτάσεις.</u>

<u>Ορ.</u> Έστω $A, B \le G$ και $\varphi : A \to B$ ισομορφισμός.

Έστω $\langle t \rangle$ η άπειρη κυκλι-
κή που παράγεται από ένα νέο στοιχείο
t. Η HNN-επέκταση της G
ως προς A, B και φ είναι η ομά-
δα πηλίκο: $G *_{\varphi}$ του ελεύθερου
γινομένου $G * \langle t \rangle$ προς την κανο-
νική $N = \langle\langle t^{-1} a t \varphi^{-1}(a) \rangle\rangle$.
Συμβ επίσης: $\langle G, t \mid t^{-1} a t = \varphi(a) \rangle$

Η ομάδα G λέγεται βάση της
HNN επεκτάσεως, οι υποομ. A, B.
προσαρτημένες υποομάδες και το t
σταθερό γράμμα.