Άλγεβρα Ι   Μάθημα 23ο (1)

(09/01/2023)

Παραδείγματα:

- $1 *_1 = 1 * \langle t \rangle / \langle t \rangle = \langle t \rangle = \mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z} *_1 = \mathbb{Z} * \langle t \rangle / \langle t \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$.

Άσκηση: Έστω $\varphi_i : H \to G_i$ μονομορ. $G = G_1 \underset{H}{*} G_2$ και $\pi : G_1 * G_2 \to G_1 \underset{H}{*} G_2$ ο φυσικός επιμορφισμός.

Μια ανηγμένη μορφή ενός $g \in G$ είναι μια έκφραση $g = \pi(g_1) \dots \pi(g_n)$ όπου $g_i \in G_1 \cup G_2$, διαδοχικά g_i ανήκουν σε διαφορετικούς παράγοντες και $g_i \notin \varphi_1(H) \cup \varphi_2(H)$, $\forall i \geq 1$ τότε (εκτός αν $n = 1$).

(1) Κάθε στοιχείο της G μπορεί να γραφεί σε ανηγμένη μορφή (ύπαρξη από $G = \langle \pi(G_i) \rangle$. και για ανηγμένη παίρνουμε μια

τέτοια ελαχίστου μήκους. ‖ (2)

(2) αν $g = \pi(g_1)\ldots\pi(g_n)$ ανηγμένη

και 2 $\Rightarrow g \neq 1$.

απόδ: Πράγματι, η κανονική μορφή

που θα προκύψει από την ανηγμένη

θα είναι $g = \pi(x_0)\pi(x_1)\ldots\pi(x_n)$

(μήκους $n+1$). και δεν θα είναι η

τετριμμένη λέξη. □

(3) Αν $\varphi_i(H) \underset{\neq}{<} G_i$ $i=1,2$ $\Rightarrow$ η G

περιέχει στοιχεία άπειρης τάξης.

απόδ: Έστω $g_i \in G_i \setminus \varphi_i(H)$

και $g = \pi(g_1)\pi(g_2)$ ανηγμένη μορφή.

$$\Rightarrow g^n = \underbrace{\pi(g_1)\pi(g_2)\ldots\pi(g_1)\pi(g_2)}_{n\text{-φορές}}$$

ανηγμένη μορφή $\overset{(2)}{\Rightarrow} g^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. □

(4) Κάθε στοιχείο πεπερασμένης τάξης της G είναι συζυγές με στοιχείο ενός παράγοντα G_i.

Απόδ: Όπως στα ελεύθερα γινόμενα.

$$G = \langle G_1, G_2 \rangle \ \square$$

Άσκηση: $G_1, G_2 \leq G$ και $H = G_1 \cap G_2$. Έστω $\varphi : G_1 *_H G_2 \to G$ ο επιμορφισμός που επάγεται από τις ενθέσεις $j_i : G_i \hookrightarrow G$.

Το φ ισομορφισμός ανν. κάθε γινόμενο στην G $g_1 \cdots g_n$ με $g_k \in G_1 \cup G_2$ και $g_k \in G_1 \setminus H, G_2 \setminus H$ και διαδοχικά g_k δεν ανήκουν στο ίδιο $G_i \setminus H$ είναι διαφορετικό του 1.

απόδ

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\pi_1"] \arrow[drr, bend left, "j_1 = id|G_1"] & & \\
H \arrow[ur, hook, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\varphi_2"'] & & G_1 *_H G_2 \arrow[r, "\varphi"] & G \\
 & G_2 \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[urr, bend right, "j_2 = id|G_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Από Κ.Σ ελευθέρων γινομένων (4)

υπάρχει ομομορφισμός

$\psi: G_1 * G_2 \to G$ που επεκτείνει

τις j_i, $\psi|_{G_i} = j_i$ παρατηρού-

με ότι

$$\psi\left(\varphi_1^{-1}(w)\varphi_2(w)\right) = \psi\left(\varphi_1^{-1}(w)\right)\psi\left(\varphi_2(w)\right)$$

$$= \varphi_1^{-1}(w)\,\varphi_2(w) = w^{-1}.w = 1$$

άρα w N (του πηλίκου $G_1 \underset{H}{*} G_2$)

$\subseteq \ker\psi$. Από Κ.Σ. της ομάδας

πηλίκο επάγεται ομομορφ.

$\varphi: G_1 \underset{H}{*} G_2 \longrightarrow G$ με $\varphi(gN) = \psi(g)$

Ιδιαιτέρως, $\varphi\circ\pi(g_i) = \psi(g_i) = g_i$

όταν $g_i \in G_i$.

- φ είναι επί γιατί $G = \langle G_1, G_2\rangle$

και $G_1, G_2 \in \operatorname{Im}\varphi$.

Η φ είναι 1-1 σε κάθε παράγωγο

(δηλ. σε λωρίδες μήκους 1) ομοίως

Είναι 1-1 αφού $\varphi(g) \neq 1$, (5)

για κάθε $g = \pi(g_1) \cdots \pi(g_n)$ γραμμένο σε ανηγμένη μορφή. Έχουμε

$\varphi(g) = \varphi \circ \pi(g_1) \cdots \varphi \circ \pi(g_n)$

$= g_1 \cdots g_n \neq 1.$

$\triangleleft$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $G = \underset{A}{*} G_i$, $H_i \leq G_i$ ώστε $B = H_i \cap A$, $\forall i$.

Τότε ο ομομορφισμός

$\underset{B}{*} H_i \longrightarrow \underset{A}{*} G_i$ που επάγεται από τις εμφυτεύσεις $H_i \hookrightarrow G_i$ είναι 1-1.

<u>Απόδ</u>: Για κάθε i, έστω S_i σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της B στην H_i.

Κάθε S_i μπορεί να επεκταθεί σε T_i σύνολο αντιπροσώπων της A στην G_i: αν $x_i, y_i \in S_i$

και $Ax_i = Ay_i \Rightarrow x_i y_i^{-1} \in A$

$\Rightarrow x_i y_i^{-1} \in B. \Rightarrow Bx_i = By_i$

$\Rightarrow x_i = y_i.$

Θεωρώντας κανονικές μορφές στα $\underset{B}{\ast} H_i$, $\underset{A}{\ast} G_i$ ως προς S_i, T_i αντίστοιχα, κάθε κανονική μορφή στην 1η ομάδα αντιστοιχεί σε κανονική μορφή στην 2η ($S_i \subseteq T_i$).

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση είναι 1-1. □.