Διαφορική Γεωμετρία I

- Δυνατότητα να κάνουμε διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό σε χώρους που δεν είναι Ευκλείδειοι

Ορσ: Έστω (M, τ) τ.χ. Ο M θα λέγεται **τοπικά Ευκλείδειος** αν για κάθε $p \in M$ υπάρχει $U \subseteq M$ ανοιχτό και ομοιομορφισμός $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$

Το ζεύγος (U, φ) λέγεται **χάρτης** του M.

Ορσ: Ένας τ.χ. (M, τ) θα λέγεται **τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης** n αν :

(α) M είναι Hausdorff (β) M 2ος αριθμήσιμος

(γ) M τοπικά n-ευκλείδειος, δηλ. $\forall p \in M$, υπάρχει $U \in M$ ανοιχτό και $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ομοιομορφ.

Συμβολισμός : $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

$p \mapsto \varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ όπου $x^j = \pi_j \circ \varphi$

($\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ j-προβολή) ως **$\{x^i\}$ συναρτήσεις συντεταγμένων**

Παραδείγματα :

(α) Προφανώς, $\mathbb{R}^n$ τοπολογική πολλ/τα διάστασης n. Η $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto p$.

$(\mathbb{R}^n, \varphi)$ είναι **ολικός χάρτης** του $\mathbb{R}^n$

(β) (σφαίρα) $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ με $S^n = \{\underbrace{(x^1, \dots, x^{n+1})}_{x} \mid \|x\| = 1\}$

Αν $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n$ είναι σαφές ότι υπάρχει $x^i \neq 0$. Ορίζουμε $U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid x^i > 0\} \subseteq S^n$ ανοιχτό $\subseteq S^n$. Ομοίως ορίζουμε U_i^-

$\Rightarrow S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^{-1})$ ①

Ορίζουμε $\varphi_i^+ : U_i^+ \to B^n$ (ανοιχτή μπάλα με κέντρο 0 και ακτίνα 1)

$\varphi_i^+(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}) \in B^n$

(ξεχνά με i-συντ.)

συνεχής με αντίστροφη

$\psi_i^+ : B^n \to U_i^+$, $\psi_i^+(\underbrace{x^1 \dots x^n}_{x}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, \underbrace{\sqrt{1-\|x\|^2}}_{i\text{-θέση}}, x^i \dots x^n)$

συνεχής $\Rightarrow \varphi_i^+$ ομοιομορφ.

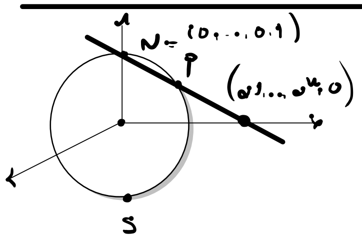
Ομοίως, ορίζεται φ_i^-. Προφανώς, με τη σχετική τοπολογία, S^n Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος και από τα παραπάνω τοπικά ευκλείδειος.

Παρατήρηση: Μια συμπαγής τ.π. $M \neq \emptyset$ δεν έχει ολικό χάρτη.

Αλλιώς, $\varphi : M \to \varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ ομοιομορφ.

$\Rightarrow \varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές + ανοιχτό άτοπο.

Στερεογραφική Προβολή (στην S^n)



Για κάθε $p \in S^n \setminus \{N\}$ ορίζεται το ε.τ. των p και N. Τέμνει το επίπεδο xy σε σημείο $a=(a^1 \dots a^n)$

$$\Rightarrow a - N = \lambda (p - N) \Leftrightarrow$$

$$(a^1,\dots,a^n,-1) = \left(\lambda x^1,\dots,\lambda x^n, \lambda(x^{n+1}-1)\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1-x^{n+1}} \Rightarrow a = \frac{1}{1-x^{n+1}}(x^1,\dots,x^n)$$

Ορίζουμε την <u>στερεογραφική</u> <u>προβολή</u> ως προς το βόρειο πόλο N

$$\varphi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x^1,\dots,x^{n+1}) = \frac{(x^1,\dots,x^n)}{1-x^{n+1}}$$

ως ομοιομορφισμός με αντίστροφη

$$\psi_N = \varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$$

$$\psi_N(\underbrace{x^1,\dots,x^n}_{x}) = \frac{(2x^1,\dots,2x^n,|x|^2-1)}{|x|^2+1}$$

Ομοίως, ορίζεται η <u>στερεογραφική προβολή</u> ως προς το νότιο πόλο

- $\varphi_S(x^1,\dots,x^{n+1}) = \dfrac{(x^1,\dots,x^n)}{1+x^{n+1}}$

(γ) Προβολικός Χώρος.

Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ σχέση ισοδυναμ.

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x = \lambda y$$

Ορίζουμε $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ <u>n-προβολικός χώρος</u>