Διαφορική Γεωμετρία II

Μάθημα 02

Προβολικός Χώρος $\mathbb{RP}^n$

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \big/ \underset{\lambda\neq 0}{x\sim\lambda x}$$

Τοπολογικός χώρος με τη τοπολογία πηλίκο

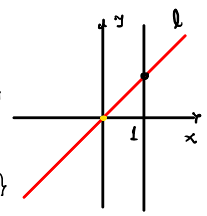
$\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{RP}^n$, $\pi(x) = [x]$

και $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ ανοιχτό $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ αν.

Κίνητρο: για $n=1$

$$\mathbb{RP}^1 \equiv \{\ell \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \text{ευθεία που διέρχεται από } (0,0)\}\setminus\{0,0\}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:



(α) Αν $\ell \not\parallel y \Rightarrow \ell$ τέμνει την $x=1$ σε σημείο $(1,\xi) \in \mathbb{R}^2/\{0\}$

$\Rightarrow \ell \sim [(1,\xi)]$: $\ell \mapsto (1,\xi) \mapsto \xi \in \mathbb{R}$

αν $U = \pi\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\} \mid x\neq 0\}\right) \subseteq \mathbb{RP}^1$

ανοιχτό. τότε $\varphi : U \to \mathbb{R}$ με

$\varphi([x,y]) = \varphi\left(\left[1,\frac{y}{x}\right]\right) = \frac{y}{x}$ ως φ ομοιομ.

$\Rightarrow (U,\varphi)$ χάρτης του $\mathbb{RP}^1$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία αυτή αφήνει έξω τον άξονα y.

Όμοια, αν $\ell \not\parallel x'x$: $\ell \mapsto (\xi,1) \mapsto \xi$

και αν $V = \pi\left(\{(x,y) \mid y\neq 0\}\right)$ με

$\psi : V \to \mathbb{R}$, $\psi(x,y) = \frac{x}{y}$ ομοιομορφισμός

(U,φ), (V,ψ) χάρτες του $\mathbb{RP}^1$ με $\mathbb{RP}^1 = U\cup V$

. Γενικότερα: $n\geq 1$

Έστω $U_i = \pi\left(\{(x^1,\dots,x^{n+1}) \mid x^i\neq 0\}\right)$

$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, με τύπο:

$$\varphi_i[x^1,\dots,x^{n+1}] = \left(\frac{x^1}{x^i},\dots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\dots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)$$

Επίσης, $\mathbb{RP}^n$ 2ος αριθμ., Hausdorff (γιατί;)

$\Rightarrow \mathbb{RP}^n$ τ.π. διάστασης n.

Πρόταση: $\mathbb{RP}^n$, $n\geq 1$ <u>συμπαγής</u> τ.π. διάστασης n.

Απόδειξη

$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι επί.

$\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{RP}^n$ είναι επί και συνεχής.

Πράγματι, αν $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

- $[x^1, \ldots, x^{n+1}] = [\underbrace{\frac{x^1}{\|x\|}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{\|x\|}}_{\in S^n}]$

$\Rightarrow \mathbb{RP}^n = \pi(S^n)$ συμπαγής.

Γινόμενα Τοπολογικών Πολ/των

Έστω $M_1, \ldots, M_k$ τ.π. με $\dim M_i = n_i$

Έστω $N = M_1 \times \cdots \times M_k$ με τοπ. γινόμενο.

Έστω $p = (p_1, \ldots, p_k)$. Συνεπώς υπάρχουν χάρτες (U_i, φ_i), $i = 1, \ldots, k$ των M_i με $p_i \in U_i$. Ορίζουμε:

$$\Phi = (\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k) : \underbrace{U_1 \times \cdots \times U_k}_{\in p} \to \mathbb{R}^{n_1 + \cdots + n_k}$$

με $\Phi(d_1, \ldots, d_k) = (\varphi_1(d_1), \ldots, \varphi_k(d_k))$

$\Rightarrow (U_1 \times \cdots \times U_k, \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_k)$ χάρτης της N.

Παραδείγματα:

(α) $S^1 \times S^1$ (β) $S^1 \times \mathbb{R}$ (γ) $S^k \times \mathbb{R}$