Διαφορική Γεωμετρία ΙΙ Μάθημα 4

Ορσ: M, N διαφορικές πολλαπλότητες

Μια $F: M \to N$ λέγεται C^∞ αν για κάθε $p \in M$ υπάρχουν C^∞-χάρτες (U,φ), (V,ψ) των M, N αντ. τ.ω. $p \in U$, $F(p) \in V$, $F(U) \subset V$ τ.ω. $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ να είναι C^∞.

Παρατήρηση: Αν $F: M \to N$ συνεχής και για κάθε (U,φ), (V,ψ) C^∞-χάρτες των M, N αντίστοιχα τ.ω. $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ να είναι C^∞ (αν $U \cap V \neq \emptyset$) $\Rightarrow$ F είναι C^∞

Παρατηρήσεις: Έστω M, N, P δ.π.

(α) Αν $F_1: M \to N$ και $F_2: N \to P$ C^∞ $\Rightarrow$ $F_2 \circ F_1 : M \to P$ C^∞.

(β) Αν $F: M \to N$ C^∞ και $\Omega \subset M$ ανοικτό (ανοικτή υποπολλαπλότητα) $\Rightarrow$ $F|_{\Omega} : \Omega \to N$ είναι C^∞.

(γ) Αν $F: M \to N$, $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα και $F|_{U_i}$ C^∞ $\forall i \in I$ $\Rightarrow$ F είναι C^∞.

απόδειξη: Άσκηση

Λήμμα (συγκόλλησης)

Έστω M, N δ.π., $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλυμμα και υπάρχουν $F_i : U_i \to N$ C^∞ τ.ω. για κάθε $x \in U_i \cap U_j$

$$F_i(x) = F_j(x).$$

Τότε, υπάρχει $F: M \to N$ C^∞ τ.ω. $F|_{U_i} = F_i$, για κάθε $i \in I$.

Απόδειξη: Ορίζουμε, για κάθε $x \in M$: $F(x) = F_i(x)$, $x \in U_i$

Από την παραπάνω παρατήρηση (γ) F είναι C^∞ $\square$

Παραδείγματα:

(α) $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ είναι C^∞.

με την standart δομή.

$i(x) = x,\ x \in S^n$.

$U_i^{\pm} = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n \mid \pm x^i > 0 \right\} \subseteq S^n$

και $\varphi_i^{\pm}(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^i, \dots, x^{n+1})$

$id_{\mathbb{R}^{n+1}} \circ i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1} : B(0,1) \to \mathbb{R}^{n+1}$

με $id \circ i \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(u^1, \dots, u^n) =$

$= \left(u^1, \dots, u^{i-1}, \sqrt{1 - \|u\|^2}, \dots, u^n\right)$ C^∞.

(β) $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ είναι C^∞.

$\mathbb{RP}^n$ με τους C^∞ χάρτες $(\pi(U_i), \varphi_i)$

$U_i = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \mid x^i \neq 0 \right\}$.

$\varphi_i \circ \pi \circ id(u^1, \dots, u^{n+1}) = \varphi_i[u^1, \dots, u^{n+1}]$

$= \left(\frac{u^1}{u^i}, \dots, \frac{u^{i-1}}{u^i}, \frac{u^{i+1}}{u^i}, \dots, \frac{u^{n+1}}{u^i} \right)$ C^∞.

Αμφιδιαφορίσεις

Ορσ: Μια $F : M \to N$ C^∞ θα λέγεται *αμφιδιαφόριση* αν είναι 1-1, επί και F^{-1} C^∞.

Σημείωση: M, N δ.π. και $F : M \to N$ αμφιδιαφόριση. Τότε

$f \in C^\infty(N) \Leftrightarrow f \circ F \in C^\infty(M)$.

Παράδειγμα: $\mathbb{R}$ τ.π. με δύο χάρτες

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x,\quad \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi(x) = x^3$

$(\mathbb{R}, \varphi), (\mathbb{R}, \psi)$ ορίζουν *διαφορετικές* διαφορικές δομές στο $\mathbb{R}$.

Είναι όμως ισοδύναμες! (Δηλ. αμφιδιαφορικές)

Αν $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\varphi), (\mathbb{R}, \mathcal{A}_\psi)$ οι αντίστοιχες διαφ. πλήρεις τότε έστω:

$\tilde{F} : (\mathbb{R}, \mathcal{A}_\varphi) \to (\mathbb{R}, \mathcal{A}_\psi),\quad \tilde{F}(x) = x^{1/3}$

$\psi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}(t) = t$ και $\varphi \circ \tilde{F}^{-1} \circ \psi^{-1}(t) = t$

$\Rightarrow \tilde{F}, \tilde{F}^{-1}$ C^∞ $\Rightarrow \tilde{F}$ *αμφιδιαφόριση*.

Σημείωση: Για $n \leq 3$ και κάθε τ.π. υπάρχει μοναδική (ως προς αμφιδιαφόριση) διαφορική δομή.

- $\mathbb{R}^n$ για $n \neq 4$ έχει *μοναδική* δ.δ (ως προς αμφ.) ενώ $\mathbb{R}^4$ υπεραριθμήσιμες.