Διαφορική Γεωμετρία II

Μάθημα 05

<u>Ερώτηση</u>: M δ.π. Υπάρχει μη σταθερή $f \in C^\infty(M)$;

<u>Κλειδί</u>: Να βρούμε $H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞ με (α) $0 \le H \le 1$ (β) $H(x)=1$, $x \in \overline{B(0,1)}$

(γ) $\operatorname{supp} H \subseteq B(0,2)$

<u>Λήμμα</u>: Υπάρχει τέτοια H όπως περιγράφεται παραπάνω.

<u>Απόδειξη</u>: αρκεί να βρούμε:

$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ τ.ω. (α) $0 \le u \le 1$

(β) $u(x)=1$, $x \le 1$ (γ) $u(x)=0$, $x \ge 2$

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε $H(x)=u(\|x\|)$

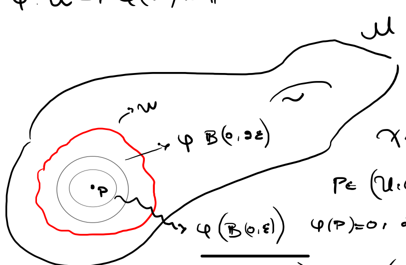
Για την u, πρώτα ορίζουμε

$$f(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases} \quad C^\infty$$

και έπειτα $$u(t)=\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t-1)}$$

αφήνεται ως άσκηση να δείξετε ότι η u ικανοποιεί (α),(β),(γ) □

Μια τέτοια H μπορεί να περάσει σε μια δ.π. M μέσω ενός C^∞-χάρτη $\varphi: U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$



Χ.β.γ. αν $p \in (U,\varphi)$ θεωρούμε $\varphi(p)=0$, άρα υπάρχει $\varepsilon>0$ τ.ω. $\overline{B(0,2\varepsilon)} \subseteq \varphi(U)$

Τότε, ορίζουμε $f: M \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$f(q)=\begin{cases} 0, & q \notin U \\ H\left(\frac{\varphi(q)}{\varepsilon}\right), & q \in U \end{cases} \in C^\infty(M)$$

Διαμερίσεις της Μονάδας

<u>Ορσ</u>: Έστω M δ.π. $\mathcal{X}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ανοιχτό κάλυμμα της M.

Μια <u>διαμέριση της μονάδας συνδεδεμένη με το κάλυμμα $\mathcal{X}$</u> είναι μια συλλογή C^∞-συναρτήσεων $\{\psi_\alpha: M \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in\Lambda}$ τ.ω.:

(α) $\operatorname{supp}\psi_\alpha \subseteq U_\alpha, \ \forall \alpha \in A$

(β) $0 \leq \psi_\alpha \leq 1, \ \forall \alpha \in A$

(γ) $\{\operatorname{supp}\psi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ είναι τοπικά πεπερ.

(δηλ. $\forall p \in M$, υπάρχει $U \in M$ αν. τ.ω. $p \in U$ και U τέμνει το πολύ πεπερασμένα στοιχεία του $\{\operatorname{supp}\psi_\alpha\}_\alpha$)

(δ) $\forall x \in M: \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha(x) = 1.$

<u>Θεώρημα</u> (ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας)

Αν M δπ και $\mathcal{X} = \{U_\alpha\}_\alpha$ ανοιχτό κάλυμμα της M, υπάρχει διαμέριση της μονάδας $\{\psi_\alpha\}_\alpha$ συμβατή με το κάλυμμα $\mathcal{X}$.

<u>απόδειξη</u>: Lee σελ. 43.

Εφαρμογές

Bump Functions

<u>Λήμμα</u>: M δ.π. $A \subseteq M$ κλειστό και $A \subseteq U$ ανοιχτό. Τότε, υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ τ.ω. $\operatorname{supp} f \subseteq U$, $0 \leq f \leq 1$ και $f = 1$ στο A.

<u>απόδειξη</u>: $\{U, M\setminus A\}$ ανοιχτό κάλυμμα του M. Άρα, υπάρχει διαμ. της μονάδας $\{\underbrace{\psi_1,\psi_2}_{\in C^\infty(M)}\}$ τ.ω.
- $\operatorname{supp}\psi_1 \subseteq U$
- $\operatorname{supp}\psi_2 \subseteq M\setminus A$

και $\psi_1 + \psi_2 = 1$. Αν $f = \psi_1$, τότε $f \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp} f \subseteq U$ και $f = 1$. □

<u>Ορσ</u>: Έστω M δ.π και $A \subseteq M$. Μια $f: A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται C^∞ αν $\forall p \in A$, $\exists\, W_p \subseteq M$ ανοιχτό $p \in W_p$ και $f_p: W_p \to \mathbb{R}$ C^∞ τ.ω.

$$f|_{A\cap W_p} = f_p|_{A\cap W_p}.$$

<u>Εφαρμογή</u>: M δπ, $A \subseteq M$ κλειστό, $A \subseteq U$ ανοιχτό και $f: A \to \mathbb{R}$ C^∞. Τότε, υπάρχει $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ τ.ω. $\tilde{f}|_A = f$ και $\operatorname{supp}\tilde{f} \subseteq U$

<u>απόδειξη</u>. Για κάθε $p \in A$, $\exists\, W_p \subseteq M$ ανοιχτό τ.ω. $p \in W_p$ και $W_p \subseteq U$

και $\varphi_p : W_p \to \mathbb{R}$ C^∞ τ.ω.

$$\varphi_p|_{W_p \cap A} = \varphi|_{W_p \cap A}$$

$\Rightarrow \{W_p\}_{p\in A} \cup \{X \setminus A\}$ ανοιχτό καλ. του U.

$\Rightarrow \exists \{\psi_p\}_{p\in A} \cup \{\psi_0\}$ διαμέριση της μονάδας τ.ω.

- $\operatorname{supp} \psi_p \subseteq W_p \subseteq U$, $\forall p \in A$, $\operatorname{supp} \psi_0 \subseteq X \setminus A$
- $0 \leq \psi_p \leq 1$, $0 \leq \psi_0 \leq 1$
- $\psi_0 + \sum_{p\in A} \psi_p = 1$. ⊛

Ορίζουμε $\boxed{\tilde{\varphi}(x) = \sum_{p\in A} \varphi_p \cdot \psi_p(x)}$

- καλά ορισμένη αφού αν $x \notin W_p$ $\psi_p(x) = 0$ και $\psi_p \varphi_p \in C^\infty(U)$

(λόγω του τοπικά πεπερ το άθροισμα $\forall x$ είναι πεπερ.)

$\Rightarrow \tilde{\varphi} \in C^\infty(U)$ και $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subseteq \bigcup_p W_p \subseteq U$

Από την ⊛ είναι άμεσο ότι επεκτείνει την φ

□