

**Σημειώσεις
Ποιοτικής Θεωρίας
Συνήθων Διαφορικών
Εξισώσεων**

Ι. Γ. Στρατής

**Τμήμα Μαθηματικών
ΕΚΠΑ
1992**

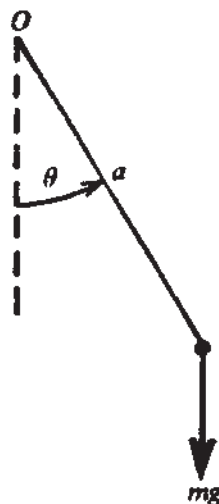
1. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΦΑΣΕΩΝ-ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΣΥΣΤΗΜΑ

Σε αυτή την παράγραφο εισάγουμε μια γεωμετρική έννοια, το διάγραμμα φάσεων, που χρησιμοποιείται για την απόκτηση, απ'ευθείας από τη διαφορική εξίσωση, πληροφοριών όπως η ισορροπία, η περιοδικότητα, η απεριόριστη αύξηση, η ευστάθεια κλπ. Το κλασικό πρόβλημα του εκκρεμούς δείχνει πως το διάγραμμα φάσεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποκαλύψει όλα τα κύρια χαρακτηριστικά των λύσεων μιας συγκεκριμένης διαφορικής εξίσωσης.

Η εξίσωση κίνησης του απλού εκκρεμούς, όταν δεν υπάρχει αντίσταση, είναι

$$m\ddot{\theta} + mg\eta\mu\theta = 0$$

όπου m, a, Θ είναι στοιχεία της κίνησης (πρβλ. Σχ.1.1).



Σχήμα 1.1.

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$m\ddot{\theta}' \frac{d\theta'}{d\theta} + mg\eta\mu\theta = 0$$

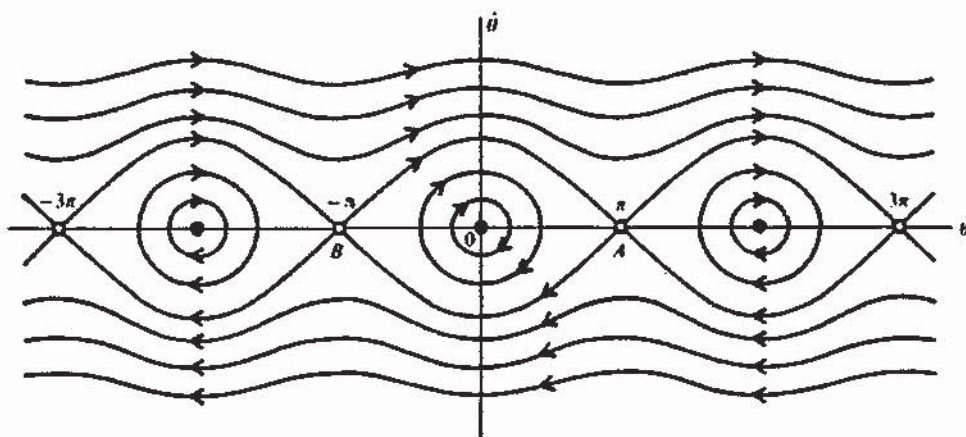
και συσχετίζει το Θ' και το Θ , αντί του Θ και του t . Ολοκληρώνοντας ως προς Θ παίρνουμε

$$\frac{1}{2} m a^2 (\theta')^2 - m g a \sin \theta = c \quad (1.2)$$

Η εξίσωση (1.2) εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας (οι όροι στο αριστερό μέρος της, είναι η κινητική και δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς, αντιστοίχως). Η τιμή του c για μια συγκεκριμένη κίνηση, προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες: τις τιμές του Θ και του Θ' για $t=0$. Διαλέγοντας διαφορετικές τιμές για το c , μπορούμε να βρούμε τη σχέση των Θ' και Θ για κάθε δυνατή κίνηση.

Είναι γνωστό ότι η (1.2), ως διαφορική εξίσωση του Θ ως προς t , δεν μπορεί να λυθεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις και ως εκ τούτου δεν είναι εύκολο να πάρουμε μια χρήσιμη αναπαράσταση του Θ ως συνάρτηση του χρόνου.

Η (1.2) μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα διάγραμμα. Καθορίζουμε ένα καρτεσιανό επίπεδο φάσεων, με άξονες Θ και Θ' (Σχ. 1.2) και σχεδιάζουμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων που δίνονται από την (1.2) για διαφορετικές τιμές του c .



Σχήμα 1.2.

Ένα δεδομένο ζεύγος τιμών (Θ, Θ') λέγεται κατάσταση του συστήματος (στην περίπτωση μας, του εκκρεμούς) και το διάγραμμα δείχνει το πως εξελίσσεται, με την πάροδο του χρόνου, οποιαδήποτε κατάσταση. Γνωρίζουμε ότι μια δεδομένη κατάσταση, προσδιορίζει όλες τις επόμενες της, αφού μπορεί να θεωρηθεί ως αρχική συνθήκη για την επόμενη κατάσταση.

Οι καμπύλες που έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 1.2 είναι γνωστές ως τροχιές (orbits) ή ολοκληρωτικές καμπύλες της (1.1) και η πλήρης

εικόνα λέγεται **διάγραμμα φάσεων** του συστήματος. Σε κάθε τροχιά αντιστοιχεί μια διεύθυνση, που υποδεικνύεται με ένα βέλος στο Σχ. 1.2, και δείχνει πως μεταβάλλεται το σύστημα καθώς αυξάνει ο χρόνος· η διεύθυνση των βελών προσδιορίζεται με το να παρατηρήσουμε ότι όταν το Θ' είναι θετικό (αρνητικό), το Θ πρέπει να αυξάνεται (μειώνεται) με την πάροδο του χρόνου.

Θεωρούμε κατ'αρχή τις δυνατές καταστάσεις φυσικής ισορροπίας του εκκρεμούς. Η προφανής είναι όταν το εκκρεμές κρέμεται χωρίς να ταλαντώνεται· τότε $\Theta=0$, $\Theta'=0$, που αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων. Η αντίστοιχη συνάρτηση $\Theta(t)=0$ είναι μια απολύτως "νόμιμη" σταθερή λύση της (1.1). Η τροχιά εκφυλίζεται σε ένα σημείο. Μια δεύτερη θέση ισορροπίας, είναι η κατάσταση $\Theta=\pi$, $\Theta'=0$. Πρόκειται για μια άλλη σταθερή λύση που παριστάνεται με το σημείο Α στο διάγραμμα φάσεων. Η ίδια φυσική συνθήκη περιγράφεται από την κατάσταση $\Theta=-\pi$, $\Theta'=0$, που παριστάνεται με το σημείο Β. Η κατάσταση $\Theta=k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Theta'=0$, αντιστοιχεί σε μια από τις δύο αυτές συνθήκες ισορροπίας. Στην πραγματικότητα, στο Σχ. 1.2 έχει σχεδιασθεί μέρος μόνο του διαγράμματος φάσεων, το σχέδιο του οποίου επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Αφού τα σημεία Ο,Α,Β αναπαριστούν καταστάσεις φυσικής ισορροπίας, ονομάζονται **σημεία ισορροπίας** ή **κρίσιμα σημεία** του διαγράμματος φάσεων.

Ας θεωρήσουμε τώρα την οικογένεια των κλειστών καμπύλων που βρίσκονται κοντά γύρω από το 0. Αυτές δείχνουν περιοδικές κινήσεις κατά τις οποίες το εκκρεμές ταλαντώνεται μπρος-πίσω περί την κατακόρυφο. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι η μέγιστη τιμή που παίρνει το Θ επί της καμπύλης. Για μικρά πλάτη, οι καμπύλες αναπαριστούν τις συνηθισμένες λύσεις της εξίσωσης του εκκρεμούς, όπου η (1.1) απλοποιείται με το να θέσουμε $\eta\mu\Theta \approx \Theta$. Οι τροχιές είναι σχεδόν ελλείψεις, στο πεδίο αυτό των μικρών πλατών.

Οι κυματιστές γραμμές στο πάνω και στο κάτω μέρος του Σχ. 1.2, επί των οποίων η Θ' έχει σταθερό πρόσημο και η Θ αυξάνεται ή μειώνεται συνεχώς, αντιστοιχούν σε κινήσεις με περιστροφή για το εκκρεμές. Οι διακυμάνσεις του Θ' οφείλονται στη βαρυτική επίδραση και για τροχιές επί των οποίων το Θ' είναι πολύ μεγάλο, αυτές οι διακυμάνσεις δεν γίνονται αντιληπτές: οι τροχιές γίνονται σχεδόν ευθείες παράλληλες με τον άξονα των Θ .

Μπορούμε ακόμα να μελετήσουμε την ευστάθεια των δύο τυπικών σημείων ισορροπίας Ο και Α. Αν η αρχική κατάσταση μετακινηθεί ελαφρώς από το Ο, πηγαίνει σε μια από τις κοντινές κλειστές καμπύλες

και το εκκρεμές ταλαντώνεται, με μικρό πλάτος, περί το O . Χαρακτηρίζουμε τότε το σημείο ισορροπίας O ως ευσταθές. Αν η αρχική κατάσταση μετακινηθεί ελαφρώς από το A (την κατακόρυφα προς τα πάνω θέση ισορροπίας), θα πέσει σε μια τροχιά που μεταφέρει την κατάσταση, από την κατάσταση ισορροπίας A σε μια μεγάλη ταλάντωση ή σε κατάσταση περιστροφής (Σχ. 1.3). Αυτό σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται ως ασταθές.

Θα ξεκινήσουμε, θεωρώντας δι-διάστατα συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου $x=x(t)$ και $y=y(t)$ είναι άγνωστες βαθμωτές συναρτήσεις και οι F και G καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοί τους είναι συνεχείς σε κάποιο τόπο Ω του xy -επιπέδου.

Αυτά τα συστήματα λέγονται αυτόνομα καθόσο ούτε η F ούτε η G εξαρτώνται από το t . Αν θέσουμε $z=(x,y)$ τότε η (1.3) είναι της μορφής

$$z' = H(z) = (F(x,y), G(x,y))$$

και οι προηγούμενες υποθέσεις εξασφαλίζουν, κατά τα γνωστά, την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων.

Μεταξύ των λόγων που θα μελετήσουμε συστήματα της μορφής (1.3), είναι ότι υπάρχει μια πληρέστερη θεωρία για αυτά, παρά για συστήματα μεγαλύτερης τάξης και ότι η γεωμετρία του επιπέδου και των επιπέδων καμπύλων μας επιτρέπει να έχουμε μια καλή εποπτεία της θεωρίας μας· επιπλέον η πολύ σημαντική αυτόνομη εξίσωση, δεύτερης τάξης

$$x'' + f(x, x') = 0$$

μπορεί να μελετηθεί, αναγόμενη στη μορφή (1.3) ως εξής

$$x' = y, \quad y' = -f(x,y)$$

Αρχίζουμε με μερικές απλές ιδιότητες των λύσεων του (1.3).

Λήμμα 1.1.

Αν η $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ είναι λύση του (1.3), τότε οι συναρτήσεις

$$x_1(t) = x(t+c) \quad , \quad y_1(t) = y(t+c)$$

είναι επίσης λύσεις του (1.3), για οποιαδήποτε πραγματική σταθερά c .

Απόδειξη: Είναι προφανές ότι $x_1' = x'(t+c)$ και $y_1' = y'(t+c)$.

Έτσι

$$\begin{aligned} x_1' &= x'(t+c) = F(x(t+c), y(t+c)) = F(x_1, y_1) \\ \text{και } y_1' &= y'(t+c) = G(x(t+c), y(t+c)) = G(x_1, y_1), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι οι x_1, y_1 είναι λύσεις το πεδίο ορισμού τους είναι το $(\alpha-c, \beta-c)$.

Παρατήρηση 1.1.: Η παραπάνω ιδιότητα δεν ισχύει, γενικώς, για μη αυτόνομα συστήματα· για παράδειγμα, η $x(t) = e^t$, $y(t) = te^t \cdot e^t$ είναι λύση του συστήματος $x' = x$, $y' = tx$. Όμως

$$y'(t+c) = (t+c)e^{t+c} \neq t \cdot x(t+c) = te^{t+c}, \text{ εκτός αν } c=0.$$

Καθώς μεταβάλλεται το t , μια λύση $x=x(t)$, $y=y(t)$ του (1.3), περιγράφει παραμετρικά μια καμπύλη στον Ω . Αυτή η καμπύλη λέγεται τροχιά του (1.3).

Λήμμα 1.2. Από τυχόν σημείο, διέρχεται το πολύ μια τροχιά.

Απόδειξη: Έστω $C_1: x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ και $C_2: x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ διαφορετικές τροχιές που έχουν ένα κοινό σημείο

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$$

Τότε θα ισχύει $t_1 \neq t_2$, αφού -στην αντίθετη περίπτωση- παραβιάζεται το μονοσήμαντο των λύσεων. Από το Λήμμα 1.1, έχουμε ότι η

$$x(t) = x_1(t+t_1-t_2) \quad , \quad y(t) = y_1(t+t_1-t_2)$$

είναι λύση και το ότι

$$(x(t_2), y(t_2)) = (x_0, y_0)$$

συνεπάγεται πως -λόγω του μονοσήμαντου- ισχύει

$$(x(t), y(t)) = (x_2(t), y_2(t))$$

Η τελευταία αυτή σχέση σημαίνει ότι οι C_1 και C_2 συμπίπτουν: άτοπο.

Παρατήρηση 1.2.: Επισημαίνουμε τη διαφορά μεταξύ λύσεων και τροχιών του (1.3): μια τροχιά είναι μια καμπύλη στον Ω που αναπαριστά-νεται παραμετρικά από περισσότερες της μιας λύσεις. Έτσι οι $(x(t), y(t))$ και $(x(t+c), y(t+c))$, $c \neq 0$ είναι διαφορετικές λύσεις, αλλά αναπαριστούν παραμετρικά την ίδια καμπύλη.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια λύση $x(t)=x_0, y(t)=y_0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ του (1.3), όπου x_0 και y_0 σταθερές. Είναι προφανές ότι από το (x_0, y_0) δεν μπορεί να περνάει καμιά τροχιά (αλλιώς θα παραβιασθεί το μονοσήμαντο). Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= 0 = F(x_0, y_0) \\ y' &= 0 = G(x_0, y_0) \end{aligned}$$

αφού οι $x(t)$ και $y(t)$ είναι λύσεις. Αντιστρόφως, αν υπάρχει ένα σημείο (x_0, y_0) στον Ω , για το οποίο $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$, τότε οι συναρτήσεις $x(t)=x_0, y(t)=y_0, t \in (-\infty, +\infty)$ είναι μια λύση του (1.3).

Ορισμός 1.1. Ένα σημείο (x_0, y_0) του Ω , στο οποίο ισχύει

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$$

λέγεται σημείο ισορροπίας ή κρίσιμο σημείο του (1.3).

Η ακόλουθη, κινηματική εικόνα, είναι πολύ χρήσιμη: ας θεωρήσου-με το πεδίο διανυσμάτων $V(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$ με $(x,y) \in \Omega$. Τότε η (1.3) περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου (x,y) που η ταχύτητα του, (x',y') , δίνεται από το $V(x,y)$ σε κάθε σημείο του Ω . Οι τροχιές είναι σταθερές πορείες κατά μήκος των οποίων το σωματίδιο κινείται ανεξάρτητα από το σημείο εκκίνησης του και τα κρίσιμα σημεία είναι όντως σημεία ισορροπίας.

Έτσι ιδωμένο, ονομάζουμε τον Ω χώρο φάσεων του συστήματος (1.3).

2. ΤΥΠΟΙ ΣΗΜΕΙΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ-ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Θεωρούμε ξανά το αυτόνομο σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) \\y' &= G(x,y)\end{aligned}\tag{2.1}$$

και υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις F και G είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους σε όλο το xy -επίπεδο. Τα σημεία ισορροπίας του (2.1) μπορούν να βρεθούν από την επίλυση του συστήματος

$$F(x,y) = G(x,y) = 0$$

Υπάρχουν τέσσερις απλοί τύποι σημείων ισορροπίας που συναντώνται συχνά, και θα τους περιγράψουμε εδώ ως προς την συμπεριφορά των κοντινών τους τροχιών. Χρειαζόμαστε, προηγουμένως, δύο ορισμούς.

Έστω (x_0, y_0) ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας του (2.1). Αν η $C: x=x(t), y=y(t)$ είναι μια τροχιά του (2.1), λέμε ότι η C προσεγγίζει το (x_0, y_0) καθώς $t \rightarrow +\infty$, αν

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0\tag{2.2}$$

Αν, επιπλέον, αληθεύει ότι είτε υπάρχει το όριο

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0}\tag{2.3}$$

είτε γίνεται $+\infty$ ή $-\infty$, τότε λέμε ότι η C εισχωρεί στο (x_0, y_0) καθώς $t \rightarrow +\infty$.

Παρατηρήσεις 2.1. (i) Το πηλίκο στη σχέση (2.3) είναι η κλίση της ευθείας που ενώνει το σημείο (x_0, y_0) με το σημείο $(x(t), y(t))$ και έτσι η επιπλέον απαίτηση σημαίνει ότι αυτή η ευθεία προσεγγίζει μια συγκεκριμένη διεύθυνση καθώς το $t \rightarrow +\infty$.

(ii) Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η (2.2) ισχύει για κάποια λύση $x(t), y(t)$, τότε το (x_0, y_0) είναι αναγκαστικά σημείο ισορροπίας.

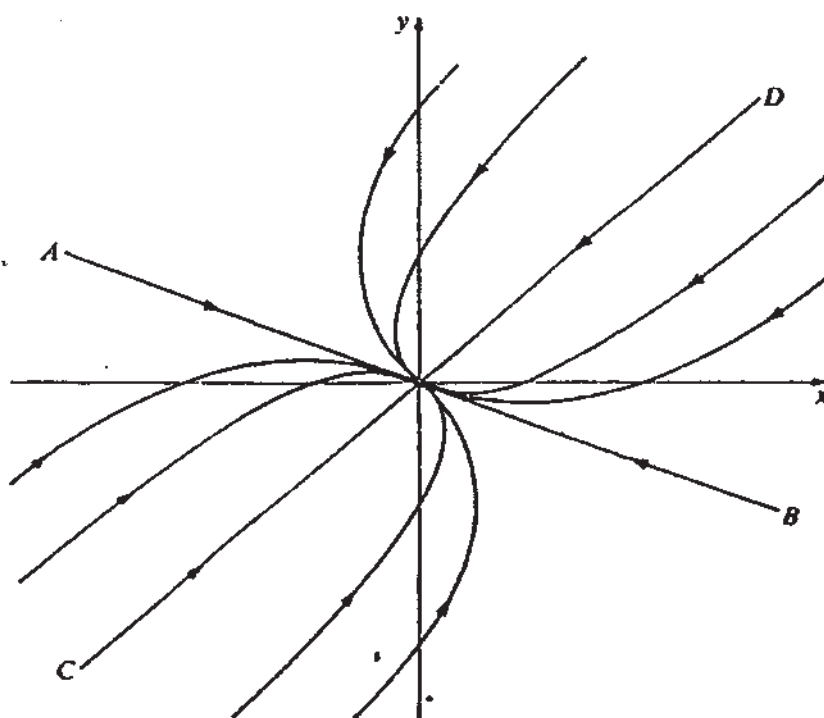
(iii) Οι παραπάνω ιδιότητες, είναι ιδιότητες της τροχιάς και είναι ανεξάρτητες της λύσης που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αυτής της τροχιάς.

(iv) Ανάλογα ορίζονται η προσέγγιση και η εισχώρηση όταν $t \rightarrow -\infty$.

Δίνουμε τώρα γεωμετρικές περιγραφές των τεσσάρων κυρίων τύπων σημείων ισορροπίας· σε όλες τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι το αντίστοιχο σημείο ισορροπίας είναι η αρχή των αξόνων $O=(0,0)$.

ΚΟΜΒΟΙ: Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.1 λέγεται κόμβος.

Κάθε τροχιά όταν $t \rightarrow +\infty$ (ή $t \rightarrow -\infty$) προσεγγίζει και εισχωρεί σε ένα τέτοιο σημείο. Για τον κόμβο του Σχ. 2.1 υπάρχουν τέσσερις ημιευθειακές τροχιές, οι AO, BO, CO και DO που μαζί με το O συναποτελούν τις ευθείες AB και CD. Όλες οι υπόλοιπες τροχιές μοιάζουν με τμήματα παραβολών και καθώς κάθε μια από αυτές τις τροχιές προσεγγίζει το O, η κλίση της προσεγγίζει εκείνη της ευθείας AB.



Σχήμα 2.1.

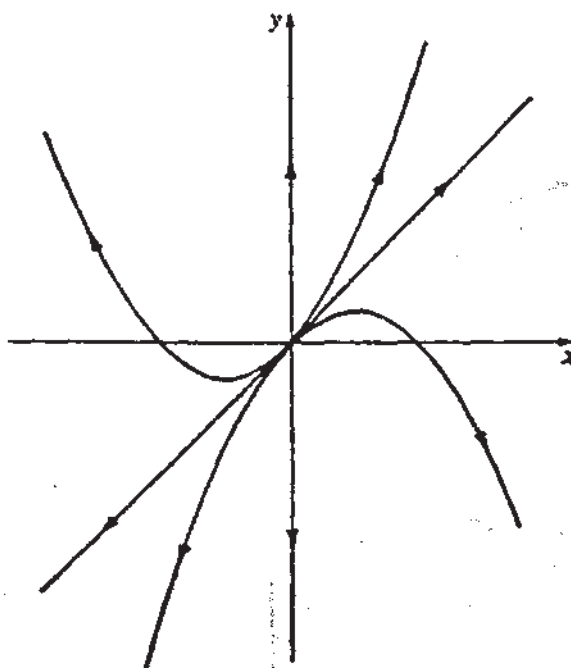
Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -x + 2y \end{aligned} \quad (2.4)$$

Προφανώς, το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0)$ και η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Όταν $c_1=0$, έχουμε $x=0$ και $y=c_2 e^{2t}$. Τότε η τροχιά είναι ο θετικός (αρνητικός) ημιάξονας των y όταν $c_2>0$ ($c_2<0$) και κάθε τροχιά προσεγγίζει και εισχωρεί στο $(0,0)$ καθώς $t \rightarrow -\infty$. Όταν $c_2=0$, έχουμε $x=y=c_1 e^t$. Η τροχιά είναι η ημιευθεία $y=x$, $x>0$ όταν $c_1>0$ και η ημιευθεία $y=x$, $x<0$ όταν $c_1<0$. Και τώρα και οι δύο τροχιές προσεγγίζουν και εισχωρούν στο $(0,0)$ όταν $t \rightarrow -\infty$.



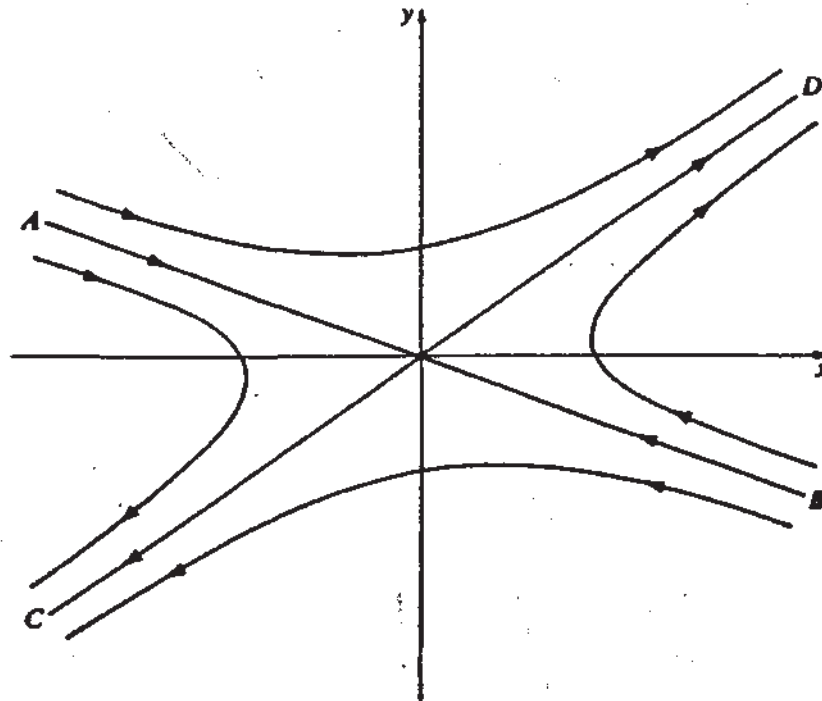
Σχήμα 2.2.

Όταν και το c_1 και το c_2 είναι διάφορα του 0, οι τροχιές βρίσκονται επί των παραβολών $y = x + \frac{c_2}{c_1} x^2$ που περνάν από το $(0,0)$ με

κλίση 1. Κάθε μια από αυτές τις τροχιές αποτελείται από ένα μόνο τμήμα μιας παραβολής, το τμήμα με $x > 0$ όταν $c_1 > 0$ και εκείνο με $x < 0$ όταν $c_1 < 0$. Κάθε μια από αυτές τις τροχιές προσεγγίζει και εισχωρεί στο $(0,0)$ καθώς $t \rightarrow -\infty$, όπως φαίνεται, άμεσα, από την (2.5). Είναι σαφές από τα παραπάνω, ότι το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι κόμβος.

ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ: Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.3. λέγεται **σαγματικό σημείο**. Οι δύο ημιευθειακές τροχιές ΑΟ και ΒΟ προσεγγίζουν και εισχωρούν στο Ο, καθώς $t \rightarrow +\infty$, και οι δύο αυτές τροχιές βρίσκονται επί μιας ευθείας ΑΒ. Επίσης, οι δύο ημιευθειακές τροχιές CO και DO προσεγγίζουν και εισχωρούν στο Ο καθώς $t \rightarrow -\infty$ και βρίσκονται επί μιας άλλης ευθείας CD.

Μεταξύ των τεσσάρων ημιευθειακών τροχιών υπάρχουν τέσσερις περιοχές, που κάθε μια περιέχει μια οικογένεια τροχιών που μοιάζουν με υπερβολές. Αυτές οι τροχιές δεν τείνουν στο Ο όταν $t \rightarrow +\infty$ ή $t \rightarrow -\infty$, αλλά είναι ασυμπτωτικές ως προς τις ημιευθειακές τροχιές όταν $t \rightarrow \pm\infty$.



Σχήμα 2.3.

ΚΕΝΤΡΑ: Κέντρο είναι ένα σημείο ισορροπίας που περιβάλλεται από μια οικογένεια κλειστών τροχιών. Δεν προσεγγίζεται από καμιά τροχιά καθώς $t \rightarrow +\infty$ ή $t \rightarrow -\infty$.

Παράδειγμα 2.2. Το μόνο σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\begin{aligned}x' &= -y \\ y' &= x\end{aligned}\tag{2.6}$$

Είναι το $(0,0)$ και η γενική του λύση η

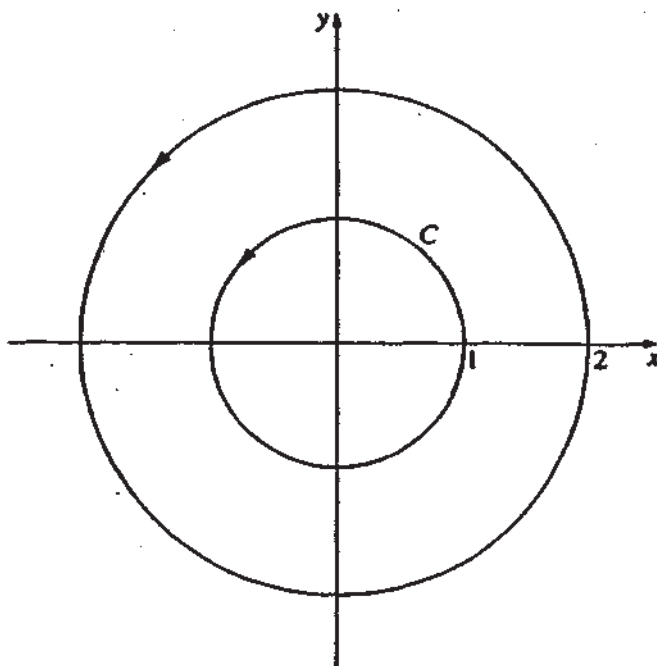
$$\begin{aligned}x &= -c_1 \eta \mu t + c_2 \sigma \nu t \\ y &= -c_1 \sigma \nu t + c_2 \eta \mu t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Στην αρχική συνθήκη $x(0)=1, y(0)=0$ αντιστοιχεί η λύση

$$x = \sigma \nu t, \quad y = \eta \mu t\tag{2.8}$$

ενώ στην αρχική συνθήκη $x(0)=0, y(0)=-1$ η λύση

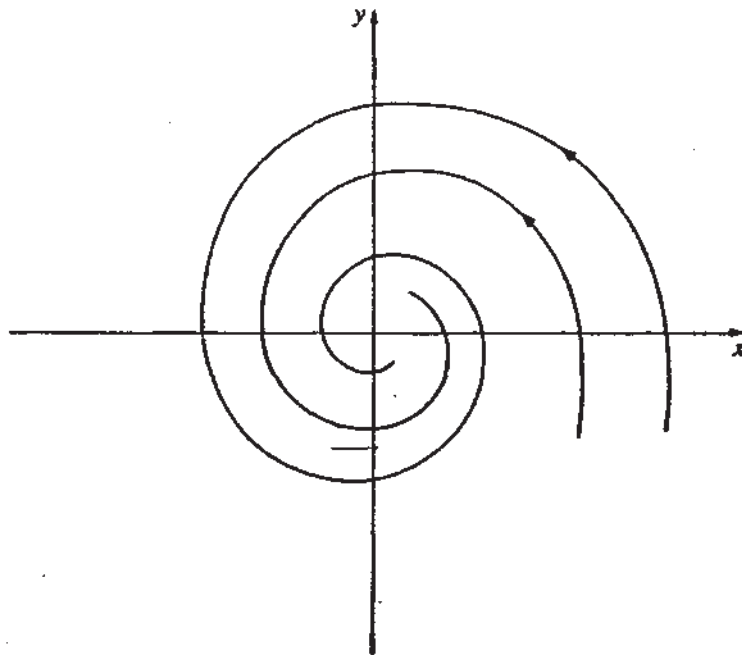
$$x = \eta \mu t = \sigma \nu \nu \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \quad , \quad y = -\sigma \nu \nu t = \eta \mu \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.9)$$



Σχήμα 2.4.

Οι δύο αυτές διαφορετικές λύσεις ορίζουν την ίδια τροχιά C (Σχ. 2.4), που είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$. Και η (2.8) και η (2.9) δείχνουν πως αυτή η τροχιά διατρέχεται κατά την αντίθετη διεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Είναι προφανές ότι το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του συστήματος (2.6) είναι κέντρο.

ΕΣΤΙΕΣ: Ένα σημείο ισορροπίας όπως αυτό του Σχ. 2.5 λέγεται εστία. Ένα τέτοιο σημείο προσεγγίζεται με ελικοειδή τρόπο από μια οικογένεια τροχιών που περιελίσσεται γύρω του άπειρες φορές καθώς $t \rightarrow +\infty$ (ή $t \rightarrow -\infty$).



Σχήμα 2.5.

Παρατηρούμε ότι καθώς οι τροχιές προσεγγίζουν το θ , δεν εισχωρούν σε αυτό. Με άλλα λόγια, ένα σημείο P κινούμενο κατά μήκος μιας τέτοιας τροχιάς προσεγγίζει το θ καθώς $t \rightarrow +\infty$ (ή καθώς $t \rightarrow -\infty$), αλλά η ευθεία OP δεν προσεγγίζει καμιά συγκεκριμένη διεύθυνση.

Παράδειγμα 2.3. Το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - y, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ y' &= x + \alpha y \end{aligned} \quad (2.10)$$

έχει ως μόνο σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \alpha y}{\alpha x - y} \quad (2.11)$$

που προκύπτει με απαλοιφή του t από το (2.10), μας δίνει τις τροχιές του (2.10). Εισάγοντας πολικές συντεταγμένες r, θ που ορίζονται από τις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

και παρατηρώντας ότι αφού $r^2 = x^2 + y^2$ και $\Theta = \text{τοξοφ}(y/x)$, έχουμε

$$r \frac{dr}{dx} = x + y \frac{dy}{dx} \quad \text{και} \quad r^2 \frac{d\Theta}{dx} = x \frac{dy}{dx} - y$$

η (2.11) γίνεται

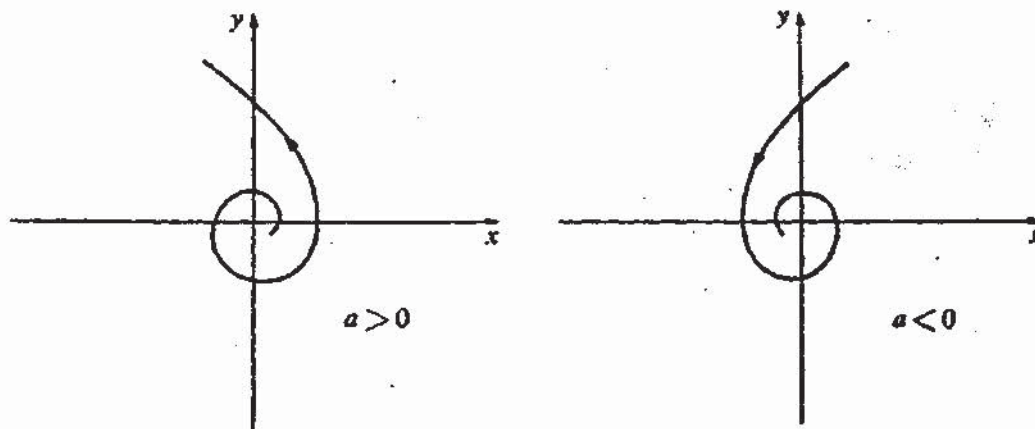
$$\frac{dr}{d\Theta} = ar$$

και έτσι

$$r = ce^{a\Theta} \quad (2.12)$$

που είναι η εξίσωση των τροχιών σε πολικές συντεταγμένες.

Οι δύο ενδεχόμενα ελικοειδείς σχηματισμοί, έχουν σχεδιαστεί στο Σχ. 2.6.



Σχήμα 2.6.

Η διεύθυνση κατά την οποία διατρέχονται αυτές οι τροχιές, προκύπτει από το γεγονός ότι $x' = -y$ όταν $x=0$. Αν $a=0$, το (2.10) ανάγεται στο (2.6) και η (2.12) γίνεται $r=c$, που είναι η εξίσωση της οικογένειας των κύκλων $x^2 + y^2 = c^2$, σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό το παράδειγμα λοιπόν, γενικεύει το Παράδειγμα 2.2. Και αφού το κέντρο του Σχ. 2.4. βρίσκεται στο μεταίχμιο μεταξύ των εστιών του Σχ. 2.6, ένα σημείο ισορροπίας που είναι κέντρο λέγεται συχνά **μεταιχμιακή περίπτωση**. Αργότερα θα συναντήσουμε και άλλες μεταιχμιακές περιπτώσεις.

Μπορούμε τώρα να εισάγουμε την έννοια της ευστάθειας (κατά Lyapunov) για το σύστημα (2.1). Χρειαζόμαστε τον ακόλουθο αριθμό:

Ορισμός 2.1. Ένα σημείο ισορροπίας (x_0, y_0) του (2.1) λέγεται μεμονωμένο, αν υπάρχει μια περιοχή του (x_0, y_0) που δεν περιέχει άλλα σημεία ισορροπίας.

Η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας, ή, ισοδύναμα, η ευστάθεια της λύσης $x(t)=x_0, y(t)=y_0, t \in (-\infty, +\infty)$ του (2.1) ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.2. Έστω (x_0, y_0) ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας του (2.1). Τότε το (x_0, y_0) λέγεται ευσταθές, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

(i) κάθε τροχιά του (2.1) που βρίσκεται στην περιοχή ακτίνας δ του (x_0, y_0) για κάποιο $t = t_0$, ορίζεται για $t_0 \leq t < +\infty$.

(ii) αν μια τροχιά ικανοποιεί το (i), παραμένει στην περιοχή ακτίνας ε του (x_0, y_0) για $t > t_0$.

Αν, επιπλέον, κάθε τροχιά $C: x = x(t), y = y(t)$ που ικανοποιεί τα (i) και (ii), ικανοποιεί και το

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_0,$$

τότε το (x_0, y_0) λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές.

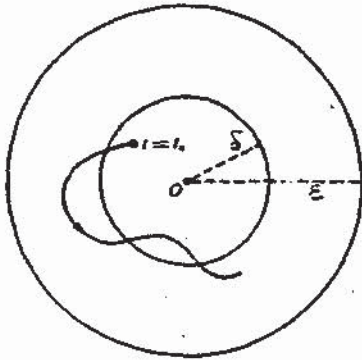
Τέλος, ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας που δεν είναι ευσταθές, λέγεται ασταθές.

Ένας ανάλογος ορισμός μπορεί να δοθεί και για την περίπτωση που $t \rightarrow -\infty$.

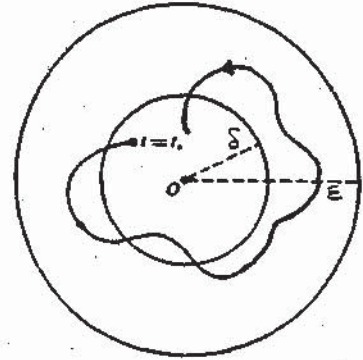
Ως παραδείγματα αυτών των εννοιών έχουμε τα ακόλουθα: ο κόμβος του Σχ. 2.2., το σαγματικό σημείο του Σχ. 2.3 και η εστία στα αριστερά του Σχ. 2.6, είναι ασταθή σημεία ισορροπίας. Το κέντρο, στο Σχ. 2.4, είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές. Ο κόμβος του Σχ. 2.1, η εστία του Σχ. 2.5 και η εστία στα δεξιά του Σχ. 2.6, είναι ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας.

Σχηματικά έχουμε

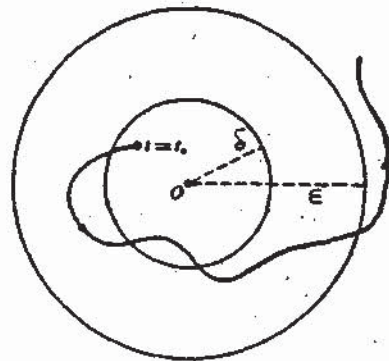
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ



ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ
ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ



ΑΣΤΑΘΕΙΑ



Σχήμα 2.7.

Ο προηγούμενος ορισμός γενικεύεται για το σύστημα

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad t \in I \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, η $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ορίζεται στο $I \times \mathbb{R}^n$, I : μη φραγμένο διάστημα του \mathbb{R} με $t_0 \in I$ και ισχύει το μονοσήμαντο των λύσεων της (2.13). Τότε η λύση $\phi(t)$, $t \geq t_0$ του (2.13) λέγεται ευσταθής αν $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε λύση $\psi(t)$ με

$$\|\phi(t_0) - \psi(t_0)\| < \delta$$

να ισχύει

$$\|\phi(t) - \psi(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

Αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t) - \psi(t)\| = 0$$

τότε η λύση $\phi(t)$ ονομάζεται ασυμπτωτικά ευσταθής.

Μπορούμε πάντοτε να αναγόμεσθε στη μελέτη της ευστάθειας της μηδενικής λύσης ενός συστήματος ως εξής:

Πρόταση 2.1. Η λύση $\phi(t)$ του συστήματος (2.13) με $\phi(t_0) = \phi_0$ είναι ευσταθής (αντιστ. ασυμπτωτικά ευσταθής, ασταθής) τότε και μόνον τότε αν η μηδενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \text{με} \quad & y' = g(t, y), \quad t \geq t_0 \\ & g(t, y) = f(t, \phi + y) - \phi'(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

είναι ευσταθής (αντιστ. ασυμπτωτικά ευσταθής, ασταθής).

Απόδειξη: Σε κάθε λύση $x(t)$ του (2.13), αντιστοιχεί μέσω του μετασχηματισμού

$$x(t) = y(t) + \phi(t)$$

μια λύση του (2.14). Στην λύση $\phi(t)$ με $\phi(t_0) = \phi_0$, αντιστοιχεί η μηδενική λύση $y_0(t) = 0$. Εξάλλου

$$\|x(t_0) - \phi(t_0)\| = \|y(t_0) - y_0(t_0)\| = \|y(t_0)\|$$

και για κάθε $t \geq t_0$

$$\|x(t) - \phi(t)\| = \|y(t) - y_0(t)\| = \|y(t)\|$$

και το συμπέρασμα έπεται από τον προηγούμενο ορισμό.

Παρατηρήσεις 2.2. (i) Η ευστάθεια των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (2.15)$$

ανάγεται, κατά τα γνωστά, στην ευστάθεια των λύσεων του συστήματος

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \dots, x_{n-1}' = x_n, \quad x_n' = f(t, x_1, \dots, x_n)$$

όπου $x_1(t) = \phi(t)$, λύση της (2.15).

(ii) Η μελέτη της ευστάθειας των λύσεων του συστήματος

$$x' = f(t,x) \quad , \quad t \geq t_0$$

ανάγεται, μέσω του μετασχηματισμού $t = \tau + t_0$, στη μελέτη της ευστάθειας του συστήματος.

$$\frac{dx}{d\tau} = f(\tau + t_0, x), \quad \tau \geq 0$$

και έτσι μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρούμε ότι

$$t_0 = 0$$

3. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια γραμμικών συστημάτων, με έμφαση σε εκείνα με σταθερούς συντελεστές.

Θεωρούμε το γραμμικό, μη ομογενές σύστημα

$$x' = A(t)x + b(t) \quad (3.1)$$

όπου ο $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και το $b(t) \in \mathbb{R}^n$, καθώς και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα

$$x' = A(t)x \quad (3.2)$$

Πρόταση 3.1. Όλες οι λύσεις του μη ομογενούς συστήματος (3.1) έχουν την ίδια ιδιότητα ευστάθειας (αστάθεια, ευστάθεια, ασυμπτωτική ευστάθεια), με εκείνη της μηδενικής λύσης του ομογενούς συστήματος (3.2).

Απόδειξη. Έστω $\phi(t)$ η λύση της οποίας θέλουμε να μελετήσουμε την ευστάθεια και $x(t)$ οποιαδήποτε άλλη λύση του (3.1). Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x(t) - \phi(t) \\ \xi(t_0) &= x(t_0) - \phi(t_0) \end{aligned}$$

οπότε

και το ξ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση

$$\xi' = A(t)\xi$$

από όπου έπεται το συμπέρασμα.

Για το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε την έννοια της νόρμας ενός πίνακα: έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $\in \mathbb{C}^{n \times n}$). Ορίζουμε

$$|A| = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

Η νόρμα αυτή έχει την ιδιότητα ότι για $u \in \mathbb{R}^n$ (ή \mathbb{C}^n) ισχύει

$$\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$$

Θεώρημα 3.1. Η μηδενική λύση (και, συνεπώς, όλες οι λύσεις) του ομογενούς συστήματος $x' = A(t)x$ είναι ευσταθής για $t \geq t_0$, t_0 : τυχόν, τότε και μόνον τότε αν κάθε λύση είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Αρκεί, σύμφωνα, με την Πρόταση 3.1 να θεωρήσουμε μόνο τη μηδενική λύση. Ας υποθέσουμε ότι η μηδενική λύση $\phi(t) = 0$ είναι ευσταθής. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))$ ο θεμελιώδης πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2} \delta I$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.
Τότε, αφού

$$\|\psi_j(t_0)\| = \frac{1}{2} \delta < \delta$$

από τον ορισμό της ευστάθειας έπεται ότι θα ισχύει

$$\|\psi_j(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

και συνεπώς κάθε λύση είναι φραγμένη, αφού κάθε άλλη λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των $\psi_j(t)$.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι κάθε λύση είναι φραγμένη. Έστω $\Phi(t)$ τυχόν θεμελιώδης πίνακας. Τότε, από την υπόθεση μας, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\Phi(t)\| < M, \quad t \geq t_0$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M\|\Phi^{-1}(t_0)\|}$$

Έστω $x(t)$ τυχούσα λύση. Θα ελέγξουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης. Είναι γνωστό (π.χ. [Αθ-Κα-Στρατ] Θεωρ. VII 1.8) ότι

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)$$

Αν, συνεπώς,

$$\|x(t_0)\| < \delta$$

τότε

$$\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|\Phi^{-1}(t_0)\| \|x(t_0)\| \leq M \frac{\varepsilon}{M\delta} \delta = \varepsilon$$

Περνάμε τώρα στη μελέτη της ευστάθειας των λύσεων του ομογενούς συστήματος με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή του

$$x' = Ax$$

$$\text{όπου } x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \text{ και } A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.4)$$

Αρκεί, όπως έχουμε δει, να μελετήσουμε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης. Έχουμε, λοιπόν:

Θεώρημα 3.2. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα με σταθερούς συντελεστές (3.2). Τότε:

(i) Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(ii) Αν μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του A έχει θετικό πραγματικό μέρος, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

(iii) Αν για όλες τις ιδιοτιμές λ του A ισχύει $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, η μηδενική λύση είναι ευσταθής, τότε και μόνον τότε αν η διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή με $\operatorname{Re} \lambda = 0$, είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της λ . Διαφορετικά, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

Απόδειξη. (i) Έστω $u_k(t) = (u_{1k}(t), \dots, u_{nk}(t))$ η λύση του (3.2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u_k(0) = e_k$. Η λύση του (3.2) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 u_k(t)$$

Όπως γνωρίζουμε, κάθε $u_{jk}(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $p(t)e^{\lambda t}$, όπου $\lambda = \alpha + i\beta$ είναι ιδιοτιμή του A και $p(t)$ πολυώνυμο του t . Από την υπόθεση μας έχουμε ότι $\alpha < 0$, και αφού

$$p(t)e^{\lambda t} = p(t)e^{\alpha t}(\sigma\eta\mu\beta t)$$

έχουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^{\lambda t} = 0$

δηλαδή, ότι οι συναρτήσεις $p(t)e^{\lambda t}$, $t \geq 0$ είναι φραγμένες. Έστω M ένα κοινό φράγμα των $u_{jk}(t)$, $t \geq 0$.

Τότε

$$|u_k(t)| = \left(\sum_{j=1}^n u_{jk}^2(t) \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \cdot M$$

και

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \sum_{k=1}^n |x_k^0| \cdot |u_k(t)| \leq \sqrt{n} \cdot M \sum_{k=1}^n |x_k^0| \\ &\leq n\sqrt{n} M \|x_0\|, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{n\sqrt{n} M}$$

Αν $\|x(0)\| < \delta$, τότε, προφανώς

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0$$

Επιπλέον, αφού $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{jk}(t) = 0$ ισχύει και ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$$

(ii) Έστω $\lambda = \alpha + i\beta$ μια ιδιοτιμή του A με $\alpha > 0$. Έστω $v = v_1 + iv_2$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε η

$$x(t) = ce^{\alpha t}(v_1 \sigma\eta\mu\beta t - v_2 \eta\mu\beta t)$$

είναι πραγματική λύση του (3.2).

Έστω $\varepsilon > 0$. Για οποιοδήποτε $\delta > 0$, μπορούμε να βρούμε $c \neq 0$, ώστε

$$\|x(0)\| = |c| \|v_1\| < \delta$$

Όμως η $\|x(t)\| = |c| \|e^{at} v_1 \cos bt - v_2 \eta \mu bt\|$ δεν είναι φραγμένη, και συνεπώς η μηδενική λύση δεν είναι ευσταθής.

(iii) Έστω ότι σε κάθε ιδιοτιμή της μορφής $\lambda = i\beta$ με αλγεβρική πολλαπλότητα τ , αντιστοιχεί ένας ιδιοχώρος διάστασης τ . Τότε στην λ αντιστοιχούν τ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του (2.3), της μορφής

$$e^{i\beta t} w_m, \quad m = 1, 2, \dots, \tau$$

όπου w_m τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Ανάλογα με την περίπτωση (i), διαπιστώνουμε ότι η λύση του (2.3) που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ θα έχει τη μορφή

$$x(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 u_k(t)$$

όπου $u_k(t) = (u_{1k}(t), \dots, u_{nk}(t))$.

Κάθε $u_{jk}(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής

$$q(t) = \begin{cases} p(t)e^{\lambda t} & , \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ ce^{\lambda t} & , \operatorname{Re} \lambda = 0 \end{cases}$$

και ως εκ τούτου, οι $u_{jk}(t)$, $t \geq 0$ είναι φραγμένες. Όπως στην περίπτωση (i), καταλήγουμε στο ότι η μηδενική λύση είναι ευσταθής.

Αν αντιθέτως, σε μια ιδιοτιμή $\lambda = i\beta$, αλγεβρικής πολλαπλότητας τ , αντιστοιχούν λιγότερα από τ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε -κατά τα γνωστά (πρβλ. [Αθ-Κα-Στρατ], κεφ. VII, §3)- προκύπτει ότι το σύστημα (2.3) έχει μια τουλάχιστον λύση της μορφής

$$x(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

όπου ένα τουλάχιστον από τα πολυώνυμα $p_k(t)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 1. Όπως στην περίπτωση (ii), προκύπτει ότι η συνάρτηση $\|x(t)\|$, $t \geq 0$ δεν είναι φραγμένη και, συνεπώς, η μηδενική λύση είναι ασταθής.

Παράδειγμα 3.1. Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων του συστήματος: $x' = Ax$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Οι ιδιοτιμές -1 και -2 του A έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη και έτσι η μηδενική λύση (επομένως και όλες) του συστήματος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 3.2. Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων του συστήματος: $x' = Ax + b(t)$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

Αρκεί να μελετήσουμε την ευστάθεια του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Εδώ οι ιδιοτιμές είναι θετικές (θα αρκούσε έστω και η μια να ήταν) και έτσι η μηδενική λύση του συστήματος είναι ασταθής.

Παράδειγμα 3.3. Να εξετασθεί η ευστάθεια του συστήματος

$$x' = Ax, \quad \text{όπου} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\phi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4$. Οι ιδιοτιμές είναι οι $\pm 2i$ και συνεπώς κάθε λύση είναι ευσταθής. Δεν είναι, όμως, ασυμπτωτικά ευσταθής. Πράγματι, η λύση του συστήματος είναι

$$x_1 = c_1 \sin 2t + c_2 \eta \mu 2t, \quad x_2 = c_1 \eta \mu 2t + c_2 \sin 2t$$

οπότε

$$\|x(t)\| = (x_1 + x_2)^{1/2} = (c_1 + c_2)^{1/2}$$

Αφού για καμιά μη μηδενική λύση δεν ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0$ η μηδενική λύση δεν είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 3.4. Να εξετασθεί η ευστάθεια της εξίσωσης

$$x'' + 2\mu x' + x = 0, \quad \mu \in \mathbf{R}$$

στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$.

Στο επίπεδο φάσεων, η εξίσωση γράφεται ως σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - 2\mu y \end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$. Έτσι, αν:

(i) $\mu \geq 1$: οι $\lambda_{1,2}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και συνεπώς το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (οι $\lambda_{1,2}$ είναι πραγματικές και αρνητικές).

(ii) $0 < \mu < 1$: οι $\lambda_{1,2}$ είναι μιγαδικές, με αρνητικό πραγματικό μέρος, και έτσι το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(iii) $\mu = 0$: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Το $(0,0)$ είναι ευσταθές.

(iv) $\mu < 0$: οι $\lambda_{1,2}$ είναι είτε πραγματικές θετικές, είτε μιγαδικές με θετικό πραγματικό μέρος, οπότε το $(0,0)$ είναι ασταθές.

Παράδειγμα 3.5. Να εξετασθεί η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(0,0)$ της εξίσωσης

$$x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 0$$

Το αντίστοιχο σύστημα στο χώρο φάσεων είναι

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= z \\z' &= u \\u' &= -x-2z\end{aligned}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι $\pm i$ που έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι ασταθές. Αυτό μπορεί να φανεί και από το γεγονός ότι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων είναι το

$$\{\sin t, \eta \mu t, t \sin t, t \eta \mu t\}$$

που περιέχει και μη φραγμένους όρους όταν $t \rightarrow +\infty$.

4. ΑΥΤΟΝΟΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η ομοιότητα πινάκων είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των $n \times n$ πραγματικών πινάκων και αυτό το σύνολο μπορεί να αναλυθεί σε κλάσεις ισοδυναμίας που λέγονται κλάσεις ομοιότητας. Οι κλάσεις ομοιότητας μπορούν να ομαδοποιηθούν σε πεπερασμένου πλήθους τύπους. Στη συνέχεια δίνουμε αυτούς τους τύπους όταν $n=2$.

Πρόταση 4.1. Έστω A ένας 2×2 πραγματικός πίνακας. Τότε υπάρχει ένας πραγματικός πίνακας M , με $\det M \neq 0$, τέτοιος ώστε ο $J = M^{-1}AM$ έχει έναν από τους ακόλουθους τύπους:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 < \lambda_2 & (\beta) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \\ (\gamma) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} & (\delta) \quad & \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta > 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

όπου $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ο πίνακας J λέγεται μορφή **Jordan** του A . Οι ιδιοτιμές του A (και του J) είναι οι τιμές του λ για τις οποίες

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A = 0 \quad (4.2)$$

Στην περίπτωση μας το ίχνος, $\text{tr}A$, του A είναι $\text{tr}A = a_{11} + a_{22}$ και η διακρίνουσα, $\det A$, του A είναι $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, ($A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2$). Έτσι οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (\text{tr}A + \sqrt{\Delta}) \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}A - \sqrt{\Delta}) \quad (4.3)$$

$$\text{όπου} \quad \Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A \quad (4.4)$$

Ο τύπος της μορφής **Jordan**, J , του A προσδιορίζεται από τη φύση των ιδιοτιμών:

(I) Πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές ($\Delta > 0$).

Αν λ_1, λ_2 με $\lambda_1 > \lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές αυτές και u_1, u_2 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που δίνονται από τη σχέση $Au_j = \lambda_j u_j, j=1,2$, θέτουμε

$$M = [u_1 | u_2]$$

τον πίνακα με στήλες τα u_1, u_2 . Τότε

$$M^{-1}AM = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

(II) Ίσες ιδιοτιμές ($\Delta = 0$)

Η (4.3) δίνει $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2 \operatorname{tr}A = \lambda_0$ και πρέπει να θεωρήσουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

(1) ο A είναι διαγώνιος

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I \quad (4.6)$$

που είναι η (4.1 (β)). Σε αυτή την περίπτωση, για οποιονδήποτε πίνακα M με $\det M \neq 0$ ισχύει $M^{-1}AM = A$, δηλ. ο A είναι ο ίδιος μια κλάση ομοιότητας.

(2) ο A δεν είναι διαγώνιος

Σε αυτή την περίπτωση $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ και $\operatorname{rank}(A - \lambda_0 I) = 1$, οπότε δεν υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έστω u_0 ιδιοδιάνυσμα του A . Επιλέγουμε το v έτσι ώστε ο $M = [u_0 | v]$ να έχει $\det M \neq 0$ και

$$AM = [\lambda_0 u_0 | Av] = M[\lambda_0 e_1 | M^{-1}Av]$$

όπου e_1 η πρώτη στήλη του I . Οι πίνακες A και $M^{-1}AM$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και έτσι

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Κάνοντας τον απλό μετασχηματισμό

$$M_1 = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

παίρνουμε

$$M_1^{-1}AM_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

που είναι η (4.1 (γ)).

(III) Μιγαδικές ιδιοτιμές ($\Delta < 0$)

Μπορούμε να γράψουμε $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, όπου $\alpha = (1/2) \operatorname{tr} A$ και $\beta = + (1/2)\sqrt{-\Delta}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει πίνακας $M = [m_1 | m_2]$, με $\det M \neq 0$ ώστε ο $M^{-1}AM$ να δίνεται από τη σχέση (4.1 (δ)), ή, ισοδύναμα ότι

$$AM = M \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Έχουμε, λοιπόν,

$$[Am_1 | Am_2] = [\alpha m_1 + \beta m_2 | -\beta m_1 + \alpha m_2]$$

που γράφεται

$$[(A - \alpha I)m_1 - \beta m_2 | \beta I m_1 + (A - \alpha I)m_2] = [O | O] \quad (4.10)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{bmatrix} A - \alpha I & -\beta I \\ \beta I & A - \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Έστω P ο πίνακας συντελεστών εξίσωσης αυτής και

$$Q = \begin{bmatrix} A - \alpha I & \beta I \\ -\beta I & A - \alpha I \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Αν $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , παρατηρούμε ότι

$$PQ = \begin{bmatrix} \Phi_A(A) & O \\ O & \Phi_A(A) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε ότι $\Phi_A(A) = O$ και έτσι

$$PQ = O \quad (4.14)$$

Συνεπώς οι στήλες του Q πρέπει να είναι λύσεις της (4.11). Η πρώτη στήλη του Q δίνει ότι

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \alpha & -\beta \\ \alpha_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα Δ του $\Phi_A(\lambda) = 0$ γράφεται ως

$$\Delta = (\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21} \quad (4.16)$$

Αν $\Delta < 0$, τότε $\alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$ και συνεπώς $\alpha_{21} \neq 0$. Επιπλέον έχουμε ότι $\beta = + 1/2 \sqrt{-\Delta} \neq 0$ και έτσι $\det M = \beta\alpha_{21} \neq 0$. Από την (4.15) παίρνουμε λοιπόν ένα πίνακα M , με $\det M \neq 0$, τέτοιον ώστε ο $M^{-1}AM$ να δίνεται από την (4.1 (δ)).

Παράδειγμα 4.1. Θεωρούμε τους πίνακες:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan για τον A_j , $j=1,2,3$.
(ii) Να βρεθεί ένας πίνακας M_j που μετατρέπει τον A_j στην αντίστοιχη κανονική μορφή Jordan, $j=1,2,3$.

Λύση. (i) Οι ιδιοτιμές των δοθέντων πινάκων είναι

$$A_1: \lambda_1 = 1 + \sqrt{2}, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \quad A_2: \lambda_1 = 3 + i, \lambda_2 = 3 - i \quad A_3: \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Έτσι, οι κανονικές μορφές Jordan, είναι

$$\text{για τον } A_1: \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{για τον } A_2: \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{για τον } A_3: \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii) Ο A_1 έχει πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές και έτσι αρκεί να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις λ_1, λ_2 , που θα ικανοποιούν τις:

$$(A_1 - \lambda_j I)u_j = 0, \quad j=1,2$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$u_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

και έτσι

$$M_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο A_2 έχει συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές και από την (4.15) παίρνουμε

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος, ο A_3 έχει μια διπλή ιδιοτιμή και η σχέση

$$(A_3 - \lambda I)u_1 = 0$$

δίνει το ιδιοδιάνυσμα

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

που αποτελεί την πρώτη στήλη του M_3 . Εκλέγοντας τη δεύτερη στήλη έτσι, ώστε $\det M_3 \neq 0$, παίρνουμε π.χ.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det M_3 = 1$$

Ο αναζητούμενος πίνακας M_3 θα είναι

$$M_3 = M_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνοψίζοντας, έχουμε

(α) κάθε 2-διάστατο γραμμικό σύστημα της μορφής

$$x' = Ax \quad (4.17)$$

μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα ισοδύναμο κανονικό σύστημα

$$y' = Jy \quad (4.18)$$

όπου $J = M^{-1}AM$ είναι η μορφή Jordan του A και

$$x = My \quad (4.19)$$

(β) ο πίνακας Jordan J , ανήκει σε έναν από τους τέσσερις τύπους που δίνονται στην Πρόταση 4.1.

Διαγράμματα φάσεων κανονικών συστημάτων στο επίπεδο

Λέμε ότι ένα γραμμικό σύστημα $x' = Ax$ είναι απλό αν $\det A \neq 0$ και ο A έχει ιδιοτιμές διάφορες του μηδενός. Σε αυτή την περίπτωση, η μόνη λύση του συστήματος $Ax=0$, είναι η $x=0$ και το σύστημα έχει ένα μόνο μεμονωμένο σημείο ισορροπίας, στην αρχή των αξόνων του επιπέδου φάσεων. Το κανονικό σύστημα που αντιστοιχεί σε ένα απλό γραμμικό σύστημα, είναι επίσης απλό, αφού οι A και J έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απλά Κανονικά Συστήματα

(I) Πραγματικές και διακεκριμένες ιδιοτιμές

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

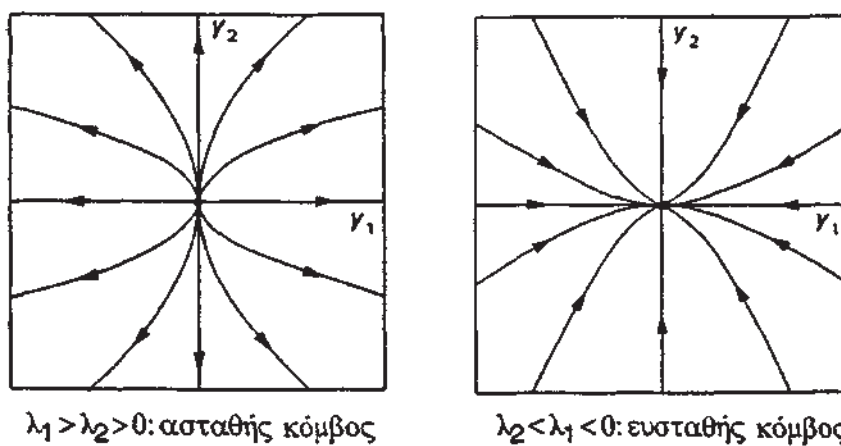
$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 > \lambda_2 \neq 0$$

Συνεπώς

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2 \quad (4.20)$$

και έτσι

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R} \quad (4.21)$$



Σχήμα 4.1.

Αν οι λ_1, λ_2 είναι ομόσημες, προκύπτουν διαγράμματα φάσεων όπως αυτά του Σχ. 4.1. Το σημείο ισορροπίας που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων του $y_1 y_2$ -επιπέδου λέγεται κόμβος. Όταν όλες οι τροχιές κατευθύνονται προς την αρχή των αξόνων, ο κόμβος λέγεται ευσταθής, ενώ όταν απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων, ο κόμβος λέγεται

ασταθής. Το σχήμα των τροχιών προσδιορίζεται από το λόγο $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Οι (4.20), (4.21) δίνουν

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k y_1^{\gamma-1} \quad (4.22)$$

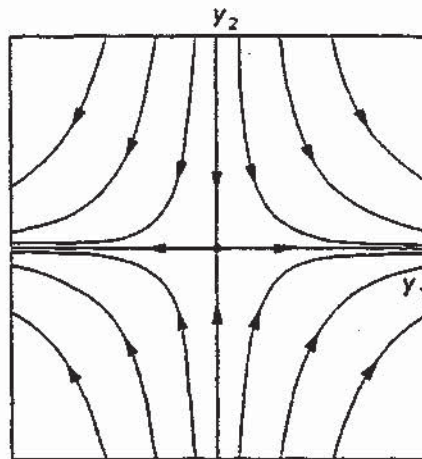
όπου

$$k = \gamma \frac{c_2}{c_1^\gamma}$$

και έτσι, όταν $y_1 \rightarrow 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow \begin{cases} 0 & , \gamma > 1 \\ +\infty & , \gamma < 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

Αν οι λ_1, λ_2 είναι ετερόσημες, προκύπτει το διάγραμμα φάσεων του Σχ. 4.2. Οι άξονες συντεταγμένων (με εξαίρεση την αρχή των αξόνων) είναι η ένωση ειδικών τροχιών που λέγονται διαχωρίζουσες. Πρόκειται για τις μόνες τροχιές που είναι ακτινικές ευθείες γραμμές. Ο κάθε άξονας περιέχει ένα ζεύγος διαχωρίζουσών (υπενθυμίζουμε ότι η αρχή των αξόνων είναι η ίδια μια τροχιά), που κατευθύνονται προς (απομακρύνονται από) την αρχή των αξόνων, αν η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι αρνητική (θετική). Οι υπόλοιπες τροχιές, έχουν τις διαχωρίζουσες ως ασύμπτωτες:



$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: σαγματικό σημείο

Σχήμα 4.2.

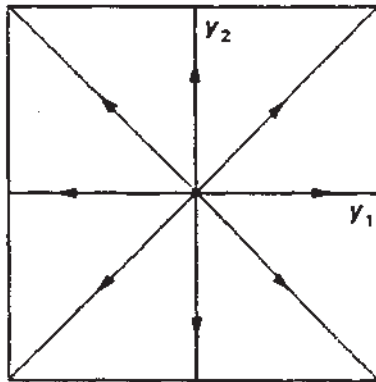
αρχικά προσεγγίζουν το σημείο ισορροπίας καθώς το t αυξάνει από το $-\infty$, στη συνέχεια περνούν από ένα σημείο εγγυτάτης προσέγγισης και τελικώς απομακρύνονται ξανά. Σε αυτή την περίπτωση η αρχή των αξόνων λέγεται σαγματικό σημείο και είναι ασταθές.

(II) Ίσες ιδιοτιμές

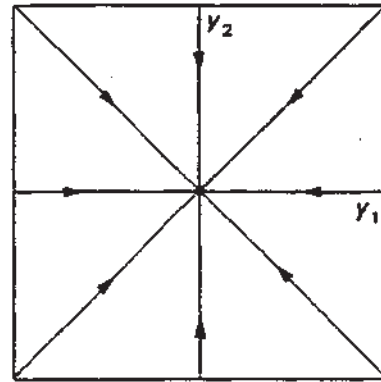
Αν ο J είναι διαγώνιος, το κανονικό σύστημα έχει λύσεις που δίνονται από την (4.21) με $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$. Έτσι, η περίπτωση που

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

αντιστοιχεί σε έναν ειδικό κόμβο, που λέγεται **αστεροειδής κόμβος** και είναι ευσταθής αν $\lambda_0 < 0$ και ασταθής αν $\lambda_0 > 0$: σε αυτή την περίπτωση οι τροχιές είναι όλες ακτινικές ευθείες γραμμές.



ασταθής αστεροειδής κόμβος



ευσταθής αστεροειδής κόμβος

Σχήμα 4.3.

Αν ο J δεν είναι διαγώνιος και έχει τη μορφή

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 \neq 0$$

τότε έχουμε το σύστημα

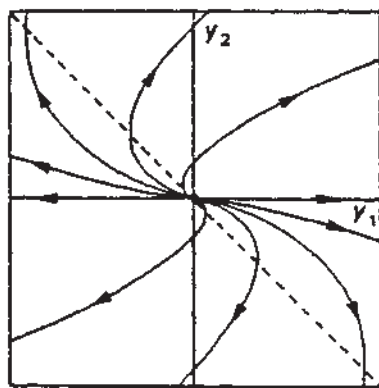
$$y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2, \quad y_2' = \lambda_0 y_2 \quad (4.24)$$

που έχει λύση

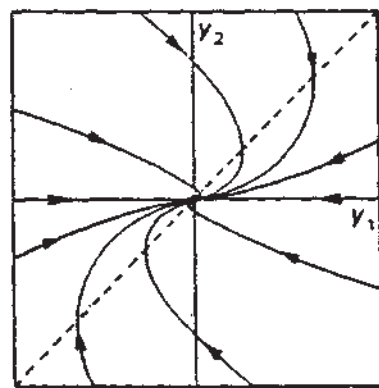
$$y_1(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t} \quad (4.25)$$

Προκύπτουν τα διαγράμματα φάσεων του Σχ. 4.4 και η αρχή των αξόνων λέγεται νόθος (εκφυλισμένος, μη γνήσιος) κόμβος και είναι ευσταθής όταν $\lambda_0 > 0$. Η ευθεία επί της οποίας αλλάζουν διεύθυνση οι τροχιές είναι ο γεωμετρικός τόπος των ακροτάτων τιμών της y_1 . Δίνεται από την ισοκλινή $y_1 = 0$ και είναι, συγκεκριμένα, η

$$y_2 = -\lambda_0 y_1 \quad (4.26)$$



ασταθής νόθος κόμβος ($\lambda_0 > 0$)



ευσταθής νόθος κόμβος ($\lambda_0 < 0$)

Σχήμα 4.4.

(III) Μιγαδικές ιδιοτιμές

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

και έτσι το κανονικό σύστημα είναι το

$$y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \quad (4.27)$$

Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να λυθεί με την εισαγωγή επιπέδων πολικών συντεταγμένων

$$y_1 = r \cos \Theta, \quad y_2 = r \sin \Theta \quad (4.28)$$

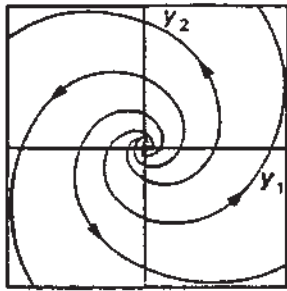
οπότε παίρνουμε

$$r' = \alpha r, \quad \Theta' = \beta \quad (4.29)$$

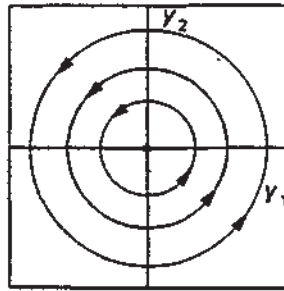
με λύση

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \Theta(t) = \beta t + \Theta_0 \quad (4.30)$$

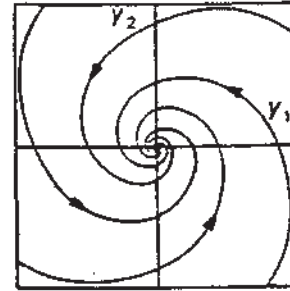
Τυπικά διαγράμματα φάσεων είναι τα ακόλουθα



ασταθής εστία ($\alpha > 0$)



κέντρο ($\alpha = 0$)



ευσταθής εστία ($\alpha < 0$)

Σχήμα 4.5.

Αν $\alpha \neq 0$, η αρχή των αξόνων λέγεται **εστία** (ευσταθής αν $\alpha < 0$ και ασταθής αν $\alpha > 0$). Συχνά λέμε ότι το διάγραμμα φάσεων αποτελείται από έναν **ελκυστικό** ($\alpha < 0$) ή **απωθητικό** ($\alpha > 0$) **έλικα**. Η παράμετρος $\beta > 0$, προσδιορίζει τη γωνιακή ταχύτητα περιγραφής του έλικα.

Όταν $\alpha = 0$, η αρχή των αξόνων λέγεται **κέντρο** και το διάγραμμα φάσεων αποτελείται από ένα συνεχές ομοκέντρων κύκλων. Αυτή είναι η μόνη, μη τετριμμένη, περίπτωση, κατά την οποία εμφανίζεται περιοδική συμπεριφορά στα γραμμικά συστήματα. Κάθε σημείο (με εξαίρεση την αρχή των αξόνων) του επίπεδου φάσεων, επανέρχεται στη θέση του με περίοδο

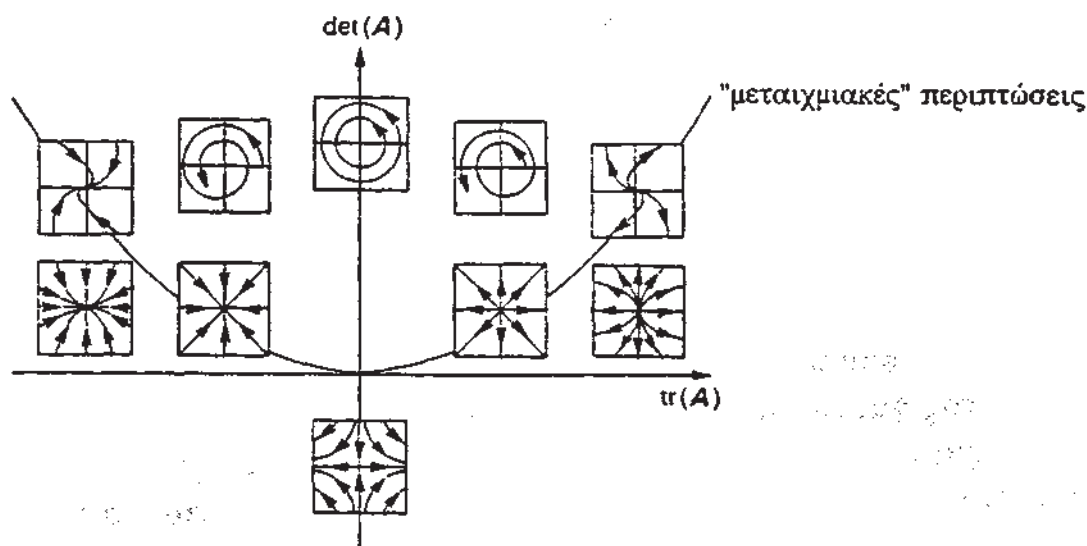
$$T = \frac{2\pi}{\beta} \quad (4.31)$$

και ισχύει

$$y_1 = r_0 \sin(\beta t + \Theta_0), \quad y_2 = r_0 \cos(\beta t + \Theta_0) \quad (4.32)$$

Η άλλη (τετριμμένη) περιοδική συμπεριφορά που εμφανίζεται στα απλά γραμμικά συστήματα, είναι το σημείο ισορροπίας (που "επανέρχεται στη θέση του" στιγμιαία, με περίοδο 0).

Μπορούμε να συνοψίσουμε τον τρόπο με τον οποίο το διάγραμμα φάσεων του συστήματος $x' = Ax$, εξαρτάται από το ίχνος και την ορίζουσα το A στο σχήμα:



Σχήμα 4.6.

Μη-απλά Κανονικά Συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα $x' = Ax$ είναι μη-απλό αν $\det A = 0$ και τουλάχιστον μια ιδιοτιμή του A είναι μηδέν. Τότε υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις του $Ax = 0$ και και το σύστημα έχει και άλλα σημεία ισορροπίας εκτός από το $x = 0$. Για γραμμικά συστήματα στο επίπεδο, υπάρχουν δύο, μόνο, δυνατότητες: είτε η τάξη του A είναι 1, είτε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας. Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει μια ευθεία σημείων ισορροπίας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων· στη δεύτερη, κάθε σημείο του επιπέδου είναι σημείο ισορροπίας. Αφού η τάξη του J είναι ίση με την τάξη του A , τα κανονικά συστήματα εμφανίζουν ανάλογη μη-απλή συμπεριφορά.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Έχοντας μελετήσει τα διαγράμματα φάσεων των γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο, περνάμε στο να θεωρήσουμε τα διαγράμματα φάσεων συστημάτων της μορφής

$$z' = H(z), \quad z \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

όπου $z = (x,y)$ και $H(z) = (F(x,y), G(x,y))$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη μη γραμμική συνάρτηση. Σε αντίθεση με τα όσα είδαμε ως τώρα, τα διαγράμματα φάσεων τέτοιων συστημάτων δεν προσδιορίζονται πάντοτε από τη φύση των σημείων ισορροπίας του συστήματος.

Κατά την ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων, συχνά θεωρούμε έναν περιορισμό του πλήρους ή ολικού διαγράμματος φάσεων σε μια περιοχή -όσο μικρή θέλουμε- ενός σημείου. Ένας τέτοιος περιορισμός λέγεται τοπικό διάγραμμα φάσεων στο εν λόγω σημείο.

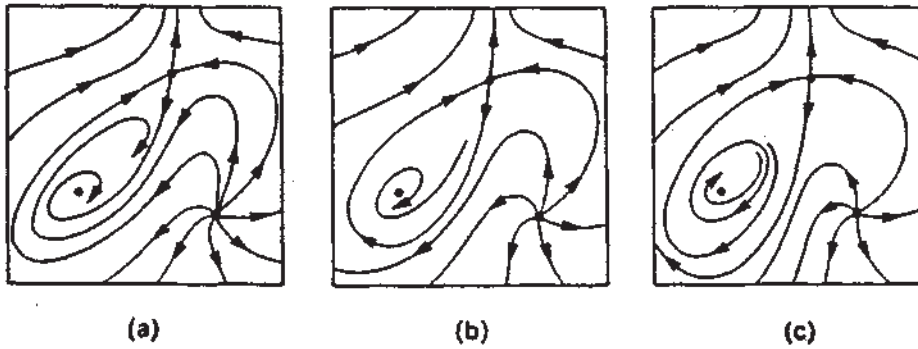
Αν θεωρήσουμε τον περιορισμό ενός απλού γραμμικού συστήματος σε μια περιοχή π της αρχής των αξόνων, υπάρχει μια περιοχή $\pi' \subset \pi$ και μια συνεχής 1-1 και επί απεικόνιση, που διατηρεί τον προσανατολισμό των τροχιών, μεταξύ της π' και του \mathbb{R}^2 που απεικονίζει τον περιορισμό του διαγράμματος φάσεων στην π' , επί του πλήρους διαγράμματος φάσεων. Αυτήν ακριβώς την ποιοτική ισοδυναμία του διαγράμματος φάσεων και των περιορισμών του εννοούμε, λέγοντας ότι το διάγραμμα φάσεων ενός απλού γραμμικού συστήματος προσδιορίζεται από την "φύση" του σημείου ισορροπίας του. Με άλλα λόγια, το τοπικό διάγραμμα φάσεων στην αρχή των αξόνων, είναι ποιοτικά ισοδύναμο με το ολικό διάγραμμα φάσεων του συστήματος.

Τα μη γραμμικά συστήματα μπορεί να έχουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας και συχνά μπορούμε να βρούμε το τοπικό διάγραμμα φάσεων για το κάθε ένα από αυτά. Εν τούτοις, τα τοπικά διαγράμματα φάσεων, δεν προσδιορίζουν πάντα το ολικό διάγραμμα φάσεων, Αν, π.χ., θεωρήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= -\alpha y + x(1-x^2-y^2) - y(x^2+y^2) \\y' &= \alpha x + y(1-x^2-y^2) + x(x^2+y^2) + \beta\end{aligned}$$

για ορισμένες τιμές των α, β , παίρνουμε τρία ποιοτικά διαφορετικά ολικά διαγράμματα φάσεων, που κάθε ένα περιέχει τρία σημεία ισορροπίας. Τα τοπικά διαγράμματα φάσεων στα σημεία ισορροπίας είναι τα ίδια και για τα τρία διαγράμματα. Η περίπτωση (c) του επομένου σχήματος, μας δείχνει ένα ολικό χαρακτηριστικό των μη γραμμικών διαγραμμάτων φάσεων που δεν μπορεί να μας αποκαλύψει η μελέτη των σημείων ισορροπίας.

Η μεμονωμένη κλειστή τροχιά που περιβάλλει ένα από τα σημεία ισορροπίας λέγεται οριακός κύκλος. Η ανίχνευση οριακών κύκλων απαιτεί μια ολική προσέγγιση.



Κατά συνέπεια, η μελέτη μη γραμμικών συστημάτων περιλαμβάνει τεχνικές που σχετίζονται και με την τοπική και με την ολική συμπεριφορά. Στις δύο επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με τεχνικές τοπικής συμπεριφοράς.

5. ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Θα εφαρμόσουμε την ανάλυση που κάναμε για τα γραμμικά συστήματα, σε μη γραμμικά συστήματα της μορφής

$$\begin{aligned}x' &= F(x,y) = ax+by+h_1(x,y) \\y' &= G(x,y) = cx+dy+h_2(x,y)\end{aligned}\tag{5.1}$$

για τα οποία υποθέτουμε ότι

(i) οι F και G καθώς και οι πρώτες μερικές παράγωγοι τους είναι συνεχείς σε μια περιοχή του $(0,0)$,

(ii) $ad-bc \neq 0$,

$$(iii) \lim_{r \rightarrow 0} \frac{h_i(x,y)}{r} = 0, \quad i=1,2, \text{ όπου } r=(x^2+y^2)^{1/2}$$

Αυτό σημαίνει ότι το $(0,0)$ είναι σημείο ισορροπίας του (5.1). Για ένα σύστημα της μορφής (5.1) που ικανοποιεί τα (i), (ii) και (iii), λέμε ότι το $(0,0)$ είναι ένα απλό σημείο ισορροπίας του (5.1).

Θα συμβολίζουμε με V και U , αντιστοίχως, τα διανυσματικά πεδία

$$\begin{aligned}V(x,y) &= (F(x,y), G(x,y)) \\U(x,y) &= (ax+by, cx+dy)\end{aligned}\tag{5.2}$$

που ορίζονται για (x,y) κοντά στο $(0,0)$. Λόγω της υπόθεσης (iii), μπορούμε να αναμένουμε ότι το διάγραμμα φάσεων του (5.1) κοντά στο $(0,0)$, θα μοιάζει με εκείνο του γραμμικοποιημένου συστήματος:

$$\begin{aligned}x' &= ax+by \\y' &= cx+dy\end{aligned}\tag{5.3}$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δείχνει ότι, πράγματι, αυτό συμβαίνει.

Θεώρημα 5.1. Το απλό σημείο ισορροπίας $(0,0)$ του (5.1) είναι μεμονωμένο και ισχύουν οι σχέσεις

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|V|}{|U|} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\arg V - \arg U) = 0 \quad (5.4)$$

Απόδειξη. Η U είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται επί του κύκλου $r=1$, αφού το $(0,0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας του (5.3). Αν

$$u = \inf_{r=1} |U|, \quad \text{τότε}$$

$$u > 0 \quad \text{και} \quad |U| \geq ur \quad \text{για κάθε } r \quad (5.5)$$

Έτσι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\| \frac{V}{|U|} - \frac{U}{|U|} \right\| \leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|V - U|}{ur} = 0 \quad (5.6)$$

λόγω της υπόθεσης (iii).

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι η V δεν μηδενίζεται κοντά στο $(0,0)$ και έτσι η αρχή των αξόνων είναι ένα μεμονωμένο σημείο ισορροπίας.

Οι σχέσεις (5.4) προκύπτουν από τις

$$\left| \frac{|V|}{|U|} - 1 \right| \leq \left\| \frac{V}{|U|} - \frac{U}{|U|} \right\| \quad (5.7)$$

και

$$\text{τοξεφω} - \text{τοξεφφ} = \text{τοξεφ} \frac{\omega - \phi}{1 + \omega\phi} \quad (5.8)$$

Θα περιγράψουμε τώρα τη συμπεριφορά των τροχιών του (5.1) κοντά στο $(0,0)$, χρησιμοποιώντας την ορολογία του κεφαλαίου 4. Μας εξυπηρετεί η εισαγωγή πολικών συντεταγμένων. Έστω ότι η $C: x=x(t), y=y(t)$ είναι μια τροχιά του (5.1). Μπορούμε να την αναπαραστήσουμε ως

$$C: r=r(t), \quad \Theta=\Theta(t), \quad r(t) > 0$$

όπου $x(t) = r(t)\cos\Theta(t), y(t) = r(t)\sin\Theta(t)$

Ορισμός 5.1. Έστω ότι υπάρχει μια περιοχή π του απλού κρίσιμου σημείου $(0,0)$ του (5.1) στην οποία:

(1) όλες οι τροχιές ορίζονται, για κάποιο t_0 , στο $t_0 < t < +\infty$ ή στο $-\infty < t < t_0$

$$(2) \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$$

Λέμε, τότε, ότι το $(0,0)$ είναι:

$$(α) \text{ εστία, αν } \lim_{t \rightarrow +\infty} |\Theta(t)| = +\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} |\Theta(t)| = +\infty \text{ για}$$

κάθε τροχιά στην π ,

$$(β) \text{ κόμβος, αν } \lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = c \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \Theta(t) = c, \text{ } c: \text{ σταθερά,}$$

για κάθε τροχιά στην π .

(γ) αστεροειδής κόμβος, αν είναι κόμβος και για κάθε σταθερά c υπάρχει μια τροχιά που ικανοποιεί είτε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Theta(t) = c \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \Theta(t) = c$$

Ορισμός 5.2. Το απλό κρίσιμο σημείο $(0,0)$ του (5.1) λέγεται:

(α) κέντρο, αν υπάρχει μια περιοχή του $(0,0)$ που περιέχει αριθμήσιμο πλήθος κλειστές τροχιές, που κάθε μια περιβάλλει το $(0,0)$ και των οποίων οι διάμετροι τείνουν στο μηδέν.

(β) σαγματικό σημείο, αν υπάρχουν δύο τροχιές που εισχωρούν στο $(0,0)$ από αντίθετες διευθύνσεις και όλες οι άλλες τροχιές που βρίσκονται κοντά σε οποιαδήποτε από αυτές τις δύο και στο $(0,0)$, απομακρύνονται καθώς το t τείνει στο άπειρο.

Μπορούμε τώρα, να δούμε με ποιο τρόπο -κάτω από τις υποθέσεις που έχουν γίνει- σχετίζονται οι τροχιές του (5.1) με εκείνες του γραμμικού συστήματος (5.3), κοντά στο απλό σημείο ισορροπίας $(0,0)$.

Κατ'αρχή, αν οι τροχιές του (5.2) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$$

τότε το ίδιο συμβαίνει για τις τροχιές του (5.1). Συνεπώς, διατηρείται η ασυμπτωτική ευστάθεια ή η αστάθεια.

Ισχύουν, επίσης, και τα ακόλουθα αποτελέσματα· παραλείπουμε τις αποδείξεις για λόγους συντομίας, αφού για κάθε περίπτωση απαιτείται λεπτομερής απόδειξη.

(1) Αν το $(0,0)$ είναι εστία για το (5.3), είναι εστία και για το (5.1).

(2) Αν το $(0,0)$ είναι κόμβος για το (5.3), είναι κόμβος και για το (5.1).

(3) Αν το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο για το (5.3), είναι σαγματικό σημείο και για το (5.1).

(4) Αν το $(0,0)$ είναι αστεροειδής κόμβος για το (5.3), δεν είναι, απαραίτητως, αστεροειδής κόμβος και για το (5.1).

Εντούτοις, αν τα $h_i(x,y)$, $i=1,2$, περιοριστούν περαιτέρω, αν π.χ. το

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|h_i|}{r^{1+\sigma}}$$
 είναι φραγμένο για κάποιο $\sigma > 0$, τότε το $(0,0)$ είναι

αστεροειδής κόμβος για το (5.1).

(5) Αν το $(0,0)$ είναι κέντρο για το (5.3), τότε είναι είτε κέντρο ή εστία για το (5.1).

Παρατήρηση 5.1. Δεν είναι απαραίτητο να αναφερόμαστε στο $(0,0)$, όπως κάναμε σε όλη την προηγούμενη θεώρηση, όταν μιλάμε για τους διάφορους τύπους σημείων ισορροπίας. Αν (ξ, η) είναι ένα σημείο ισορροπίας για το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned} \quad (5.9)$$

τότε οι μεταβλητές

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - \xi \\ \bar{y} &= y - \eta \end{aligned} \quad (5.10)$$

αποτελούν ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων του επιπέδου φάσεων, που έχουν ως αρχή των αξόνων τους το σημείο $(\bar{x}, \bar{y}) = (\xi, \eta)$ και ονομάζονται τοπικές συντεταγμένες στο (ξ, η) . Ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= x' = F(x,y) = F(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \\ \bar{y}' &= y' = G(x,y) = G(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \end{aligned}$$

και αν ορίσουμε

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\bar{x}, \bar{y}) &= F(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \\ \tilde{G}(\bar{x}, \bar{y}) &= G(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta)\end{aligned}\quad (5.11)$$

παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \tilde{F}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y}' &= \tilde{G}(\bar{x}, \bar{y})\end{aligned}\quad (5.12)$$

που έχει το -υπό εξέταση- σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων του επιπέδου φάσεων.

Υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος εύρεσης γραμμικοποιήσεων με τη χρήση αναπτυγμάτων Taylor. Θεωρούμε και πάλι το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y) \\ y' &= G(x, y)\end{aligned}\quad (5.13)$$

και υποθέτουμε ότι οι $F(x, y)$, $G(x, y)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε μια περιοχή ενός σημείου (ξ, η) . Τότε

$$F(x, y) = F(\xi, \eta) + (x - \xi) \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) + (y - \eta) \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) + R_1(x, y)\quad (5.14)$$

$$G(x, y) = G(\xi, \eta) + (x - \xi) \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) + (y - \eta) \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) + R_2(x, y)$$

όπου

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2} \left\{ (x-\xi)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z,\zeta) + 2(x-\xi)(y-\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(z,\zeta) + (y-\eta)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(z,\zeta) \right\} \quad (5.15)$$

με $z \in (\xi, x)$, $\zeta \in (\eta, y)$, είναι το υπόλοιπο δεύτερης τάξης του αναπτύγματος Taylor της $F(x,y)$ στο σημείο (ξ, η) , και το $R_2(x,y)$ ορίζεται ανάλογα. Είναι, όμως, προφανές ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_i(x,y)}{r} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.16)$$

όπου

$$r = ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)^{1/2}$$

Αν το (ξ, η) είναι ένα σημείο ισορροπίας του (5.13), έχουμε

$$F(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) = 0$$

και εισάγοντας τις τοπικές συντεταγμένες

$$\bar{x} = x - \xi, \quad \bar{y} = y - \eta$$

παίρνουμε

$$\bar{x}' = \bar{x} \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta) + \bar{y} \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta) + R_1(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta) \quad (5.17)$$

$$\bar{y}' = \bar{x} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta) + \bar{y} \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) + R_2(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta)$$

Αυτό το σύστημα είναι της μορφής (5.1) με

$$h_i(x,y) = R_i(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), \quad i = 1, 2$$

και

$$a = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, \eta), \quad b = \frac{\partial F}{\partial y}(\xi, \eta), \quad c = \frac{\partial G}{\partial x}(\xi, \eta), \quad d = \frac{\partial G}{\partial y}(\xi, \eta) \quad (5.18)$$

και μπορεί, επίσης, να γραφεί ως

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (\xi, \eta)} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.2. (Θεώρημα Γραμμικοποίησης). Έστω ότι το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned}$$

έχει ένα απλό σημείο ισορροπίας στο $(x,y) = (0,0)$. Τότε, σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων, τα διαγράμματα φάσεων του συστήματος και της γραμμικοποίησης του, είναι ποιοτικά ισοδύναμα, με την προϋπόθεση ότι το $(0,0)$ δεν είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= e^{x+y} \cdot y \\ y' &= -x + xy \end{aligned} \quad (5.20)$$

και στη συνέχεια να γραμμικοποιηθεί το σύστημα σε αυτά τα σημεία.

Τα σημεία ισορροπίας του (5.20) ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{aligned} e^{x+y} \cdot y &= 0 \\ x(y-1) &= 0 \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε $x=0$ ή/και $y=1$.

Αν $x=0$, η πρώτη εξίσωση γίνεται $e^y=y$ που δεν έχει καμία πραγματική λύση και έτσι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας με $x=0$. Αν $y=1$, παίρνουμε $e^{x+1}=1$, οπότε $x=-1$. Έτσι, το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το $(-1,1)$.

Εισάγουμε τις τοπικές συντεταγμένες

$$\tilde{x} = x+1 \quad \tilde{y} = y-1$$

και κατόπιν υπολογισμών (θέτοντας $F(x,y) = e^{x+y}-y$, $G(x,y) = -x+xy$) έχουμε

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (-1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε η γραμμικοποίηση στο $(-1,1)$ είναι

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

δηλαδή,

$$\tilde{x}' = \tilde{x} \quad , \quad \tilde{y}' = -\tilde{y}$$

(ή $x' = x+1$, $y' = 1-y$, ως προς τις αρχικές συντεταγμένες).

Παράδειγμα 5.2. Να προσδιοριστεί το τοπικό διάγραμμα φάσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= x+4y+e^x-1 \\ y' &= -y-ye^x \end{aligned}$$

στην αρχή των αξόνων.

Έστω $F(x,y)=x+4y+e^x-1$ και $G(x,y)=-y(1+e^x)$. Αυτές οι συναρτήσεις είναι συνεχώς διαφορίσιμες και έτσι παίρνουμε τη γραμμικοποίηση

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x,y) = (0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

που γράφεται $x' = 2x + 4y$, $y' = -2y$

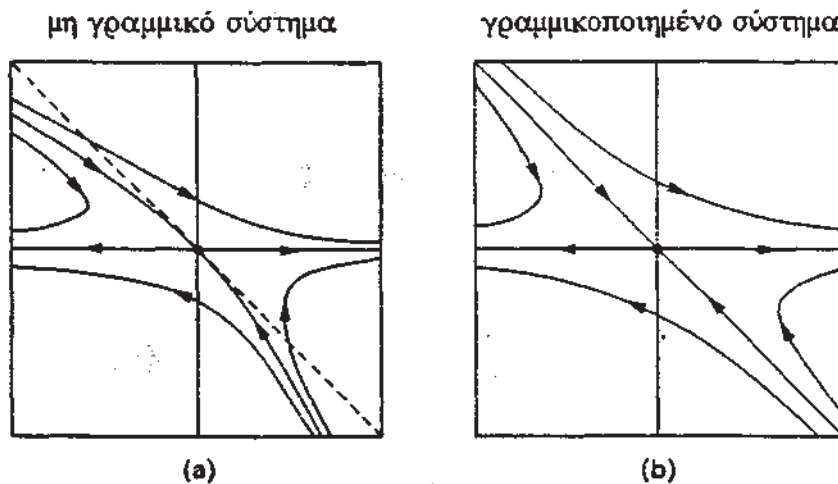
Αυτό είναι ένα απλό γραμμικό σύστημα και η αρχή των αξόνων είναι σαγματικό σημείο, αφού οι ιδιοτιμές είναι το 2 και το -2.

Οι διευθύνσεις των διαχωρίζουσών δίνονται από τα αντίστοιχα

ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Έτσι οι ασταθείς διαχωρίζουσες

βρίσκονται επί της ευθείας $y=0$, ενώ οι ευσταθείς επί της $y=-x$. Για το μη γραμμικό σύστημα, υπάρχει μια περιοχή του $(0,0)$ στην οποία οι μη γραμμικές διαχωρίζουσες είναι όπως στο Σχ. 5.1 (α). Αυτό ισχύει, επειδή

επί της $y=-x$ έχουμε $\frac{dy}{dx} \cong -1$ όταν $x \cong 0$.



Σχήμα 5.1.

Παράδειγμα 5.3. Να δειχτεί ότι τα συστήματα

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(x^2 + y^2) \\ y' &= x + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

και

$$\begin{aligned} x' &= -y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= x - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (5.22)$$

έχουν τα ίδια γραμμικοποιημένα συστήματα στο $(0,0)$, αλλά ότι τα διαγράμματα φάσεων είναι ποιοτικά διαφορετικά.

Το (5.21) και το (5.22) είναι στη μορφή (5.1) αφού

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{x(x^2 + y^2)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y(x^2 + y^2)}{r} = 0$$

Έτσι και τα δύο συστήματα έχουν τη γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned} \quad (5.23)$$

που στο σημείο $x=y=0$ έχει κέντρο.

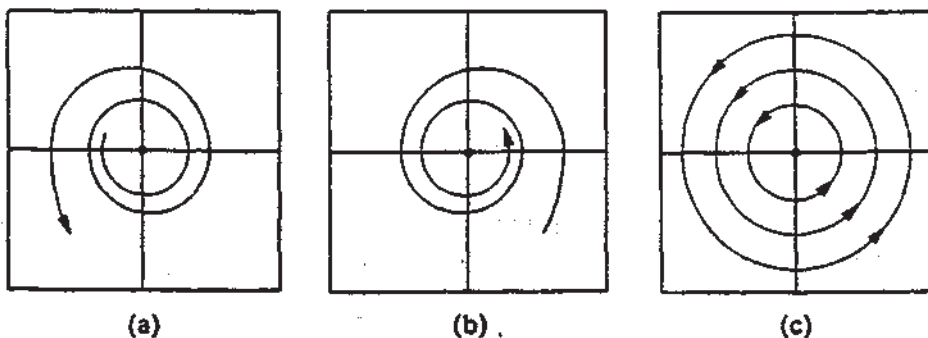
Όμως σε πολικές συντεταγμένες το (5.21) γίνεται

$$r' = r^3, \quad \Theta' = 1 \quad (5.24)$$

ενώ το (5.22) παίρνει τη μορφή

$$r' = -r^3, \quad \Theta' = 1 \quad (5.25)$$

Η (5.24) δείχνει ότι $r' > 0$ για κάθε r και συνεπώς οι τροχιές του (5.21) είναι έλικες με διεύθυνση προς τα έξω καθώς αυξάνεται το t , ενώ για το (5.25) ισχύει $r' < 0$ για τα θετικά r και οι τροχιές του (5.22) είναι έλικες που διευθύνονται προς τα μέσα. Έτσι το (5.21) έχει ασταθή συμπεριφορά, ενώ το (5.22) ευσταθή. Εντούτοις, αρκετά κοντά στο $(0,0)$, τα διανυσματικά πεδία και του (5.21) και του (5.22) προσεγγίζονται ποσοτικά -και μάλιστα με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια- από το γραμμικό διανυσματικό πεδίο του (5.23).



Σχήμα 5.2.

Τα διαγράμματα φάσεων των συστημάτων (5.21), (5.22) και (5.23), αντιστοίχως, απεικονίζονται στα Σχ. 5.2 (a), Σχ. 5.2 (b) και Σχ. 5.2 (c).

Παρατήρηση 5.2. Από το Παράδειγμα 5.3 φαίνεται ότι, το να είναι ποσοτικά κοντά η συνάρτηση $(F(x,y), G(x,y))$ και η γραμμικοποίηση της δεν εγγυάται την ποιοτική ισοδυναμία του μη γραμμικού συστήματος και του γραμμικοποιημένου. Το θεώρημα Γραμμικοποίησης μας λέει ότι το κέντρο είναι η μόνη εξαίρεση: αν, δηλαδή, οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος έχουν μη μηδενικό πραγματικό μέρος, τα διαγράμματα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος και της γραμμικοποίησης του, είναι τοπολογικά ισοδύναμα σε μια περιοχή του σημείου ισορροπίας. Τα σημεία ισορροπίας με αυτή την ιδιότητα λέγονται **υπερβολικά**.

Παρατήρηση 5.3. Η ιδιότητα της ευστάθειας ή αστάθειας για κόμβους, νόθους κόμβους και εστίες της γραμμικοποίησης, διατηρείται και στο διάγραμμα φάσεων του μη γραμμικού συστήματος. Μπορούμε, λοιπόν, να χαρακτηρίζουμε τα μη γραμμικά σημεία ισορροπίας ως κόμβους, εστίες, κ.ο.κ., όταν οι γραμμικοποιήσεις τους έχουν τον ίδιο τύπο.

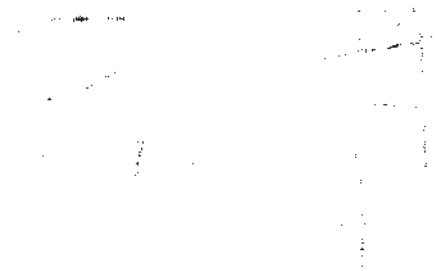
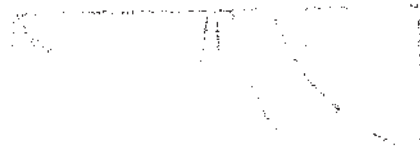
Αυτή η γενική ιδιότητα των υπερβολικών σημείων ισορροπίας, οφείλεται στον ειδικό χαρακτήρα της συνεχούς, 1-1 και επί απεικόνισης που υπεισέρχεται στην ποιοτική ισοδυναμία. Η απεικόνιση αυτή πρέπει να αντανakλά την ποσοτική σύμπτωση της $(F(x,y), G(x,y))$ και της γραμμικοποίησης της, κοντά στο σημείο ισορροπίας. Πρέπει, σε μικρές περιοχές, η εν λόγω απεικόνιση να μην απέχει πολύ -υπό κάποια έννοια- από την ταυτοτική.

Παρατήρηση 5.4. Οι εφαπτόμενες, στο σημείο ισορροπίας, των διαχωριζουσών του γραμμικοποιημένου συστήματος, είναι, επίσης, εφαπτόμενες των μη γραμμικών διαχωριζουσών (πρβλ. Σχ. 5.1). Οι διευθύνσεις των γραμμικών διαχωριζουσών, παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των μη γραμμικών συστημάτων και λέγονται **κύριες διευθύνσεις**.

Παρατήρηση 5.5. Ένα σημείο ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος λέγεται **μη απλό** αν το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα είναι μη απλό. Υπενθυμίζουμε ότι, τέτοια συστήματα έχουν μια ευθεία γραμμή (ή, ενδεχομένως, και ένα ολόκληρο επίπεδο) από σημεία ισορροπίας. Οι μη γραμμικοί όροι $h_1(x,y)$, $h_2(x,y)$ συστημάτων της μορφής (5.1) μπορούν να μεταβάλλουν ουσιαστικά αυτή την συμπεριφορά.

Πράγματι, σε αντίθεση με τα απλά σημεία ισορροπίας, υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί τύποι τοπικών διαγραμμάτων φάσεων. Στα επόμενα σχήματα βλέπουμε τι μπορεί να συμβεί ακόμα και για μη γραμμικότητες πολυωνυμικού τύπου χαμηλού βαθμού. Οι γραμμικοποιήσεις όλων των συστημάτων αυτών, έχουν μια τουλάχιστον ευθεία γραμμή από σημεία ισορροπίας ως διαγράμματα φάσεων.

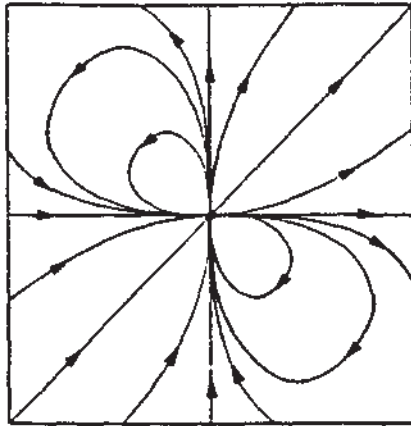
Να σημειώσουμε, τέλος, ότι γραμμές από σημεία ισορροπίας μπορεί να εμφανιστούν και σε μη γραμμικά συστήματα· δεν είναι απαραίτητως ευθείες και αποτελούνται πάντα από μη απλά σημεία ισορροπίας. Όλα αυτά καθιστούν εύλογο το γεγονός ότι δεν υπάρχει λεπτομερής ταξινόμηση των μη απλών σημείων ισορροπίας.



Μη γραμμικό σύστημα

$$x' = x(x+2y)$$

$$y' = y(2x+y)$$



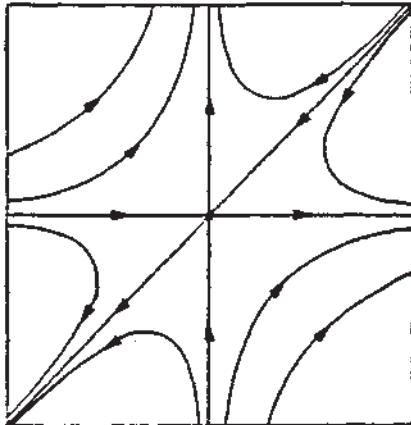
Γραμμικοποιημένο σύστημα

$$x' = 0$$

$$y' = 0$$

$$x' = x(x-2y)$$

$$y' = -y(2x-y)$$

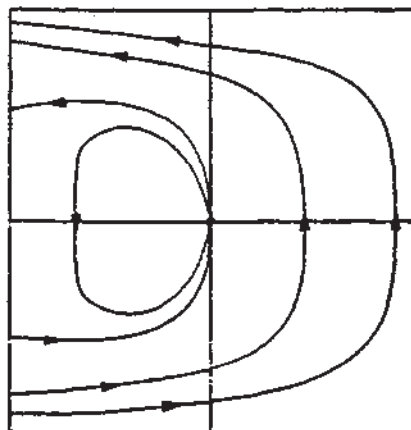


$$x' = 0$$

$$y' = 0$$

$$x' = -y^5$$

$$y' = x+y^2$$



$$x' = 0$$

$$y' = x$$

Σχήμα 5.3.

6. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Κάθε σημείο του διαγράμματος φάσεων του συστήματος

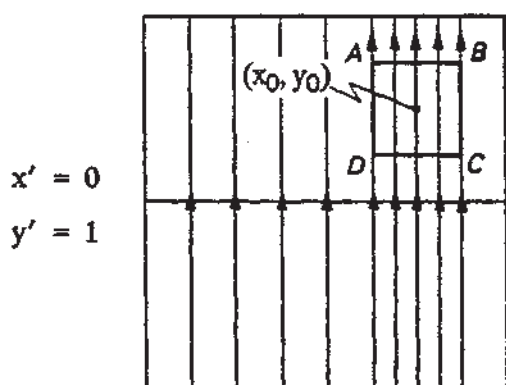
$$x' = F(x,y)$$

$$y' = G(x,y)$$

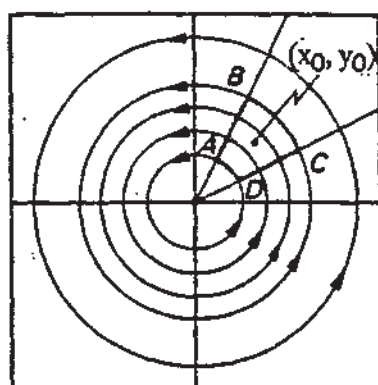
που δεν είναι σημείο ισορροπίας, λέγεται κανονικό σημείο.

Έτσι, αν το (x_0, y_0) είναι ένα κανονικό σημείο, τότε $(F(x_0, y_0), G(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ και λόγω της συνέχειας των F και G , υπάρχει μια περιοχή του (x_0, y_0) που περιέχει μόνο κανονικά σημεία. Κατά συνέπεια, το τοπικό διάγραμμα φάσεων σε ένα κανονικό σημείο, δεν περιέχει σημεία ισορροπίας. Υπάρχει ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά στην ποιοτική ισοδυναμία τέτοιων τοπικών διαγραμμάτων φάσεων: πρόκειται για το "Θεώρημα του Κιβωτίου Ροής" (Flow Box Theorem).

Ας θεωρήσουμε τα τοπικά διαγράμματα φάσεων σε ένα τυπικό κανονικό σημείο, που έχουν σχεδιαστεί στα Σχήματα 6.1 ως 6.3. Σε όλες τις περιπτώσεις έχει σχεδιαστεί μια ειδική περιοχή του (x_0, y_0) που λέγεται κιβώτιο ροής. Οι τροχιές του συστήματος εισέρχονται από τη μια πλευρά και εξέρχονται από την απέναντι της, ενώ δεν υπάρχουν τροχιές που να διαφεύγουν από τις πλαϊνές πλευρές. Για κάθε ένα από αυτά τα διαγράμματα φάσεων, μπορούν να βρεθούν νέες συντεταγμένες του επιπέδου, έτσι ώστε το τοπικό διάγραμμα φάσεων εντός του κιβωτίου ροής να είναι όπως αυτό του Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1.

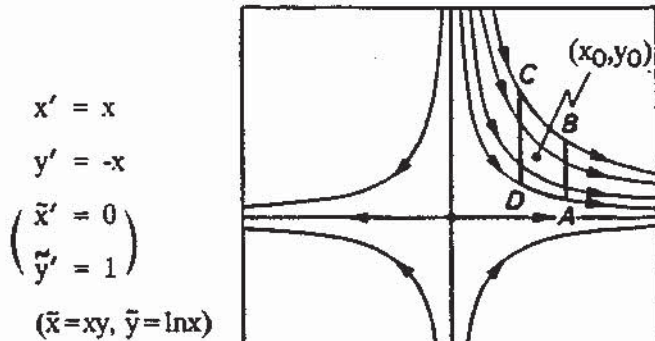


Σχήμα 6.2.

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \\ (r' &= 0) \\ (\Theta' &= 1) \\ (r &= (x^2 + y^2)^{1/2}, \\ \Theta &= \text{τοξοφ}(y/x) \end{aligned}$$

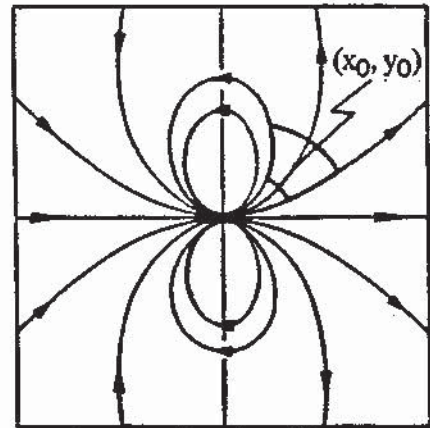
Πιο συγκεκριμένα, για το Σχ. 6.2 θεωρούμε πολικές συντεταγμένες (r, Θ) . Στο (r, Θ) -επίπεδο, οι κύκλοι ($r = \text{σταθ.}$) γίνονται ευθείες παράλληλες με τον άξονα $\Theta = 0$ και οι ακτινικές γραμμές ($\Theta = \text{σταθ.}$) γίνονται

ευθείες παράλληλες με τον άξονα $r=0$. Συνεπώς το διάγραμμα φάσεων εντός του κιβωτίου ροής στο Σχ. 6.2, είναι, (r,Θ) -επίπεδο, το ίδιο με εκείνο του Σχ. 6.1.



Υπάρχουν συντεταγμένες που μετασχηματίζουν το τοπικό διάγραμμα φάσεων του Σχ. 6.4 στο (x_0, y_0) σε μορφή όπως εκείνη του Σχ. 6.1.

Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.4.

Για το Σχ. 6.3 οι τροχιές στην περιοχή του (x_0, y_0) βρίσκονται επί των υπερβολών $xy=c>0$. Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές $\bar{x}=xy$ και $\bar{y}=\ln x$, τότε το κιβώτιο ροής φράσσεται από τις ευθείες $\bar{x}=\text{σταθ.}$ και $\bar{y}=\text{σταθ.}$ Στο \bar{x}, \bar{y} -επίπεδο, το διάγραμμα φάσεων είναι, πάλι, ίδιο με αυτό του Σχ. 6.1.

Αυστηρότερα, έχουμε το

Θεώρημα 6.1. ("Θεώρημα του Κιβωτίου Ροής"). Έστω (x_0, y_0) ένα κανονικό σημείο του συστήματος

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y) \\ y' &= G(x,y) \end{aligned}$$

Τότε, σε μια ικανοποιητικά μικρή περιοχή του (x_0, y_0) , υπάρχει μια διαφορίσιμη αλλαγή συντεταγμένων

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \phi(x,y) \\ \bar{y}' &= \psi(x,y) \end{aligned}$$

τέτοια ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= 0 \\ \bar{y}' &= 1 \end{aligned}$$

Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Hi-Sma], σελ. 242.

Παρατήρηση 6.1. Το θεώρημα 6.1 εγγυάται την ύπαρξη νέων συντεταγμένων που έχουν την παραπάνω ιδιότητα, τουλάχιστον σε μια περιοχή οποιουδήποτε κανονικού σημείου, για οποιοδήποτε σύστημα. Συνεπώς, τα τοπικά διαγράμματα φάσεων στα κανονικά σημεία, είναι όλα ποιοτικά ισοδύναμα.

Παρατήρηση 6.2. Τα θεωρήματα Γραμμικοποίησης και "Κιβωτίου Ροής" μας δίνουν τοπικά διαγράμματα φάσεων στα περισσότερα απλά σημεία ισορροπίας και σε όλα τα κανονικά σημεία. Αυτές, όμως, οι πληροφορίες δεν προσδιορίζουν το πλήρες διάγραμμα φάσεων ενός συστήματος, όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα: το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= 2x - x^2 \\y' &= -y + xy\end{aligned}\quad (6.1)$$

έχει σημεία ισορροπίας τα $A=(0,0)$ και $B=(2,0)$. Τα γραμμικοποιημένα συστήματα είναι

$$\begin{aligned}x' &= 2x \\y' &= -y\end{aligned}\quad \text{στο } A \quad (6.2)$$

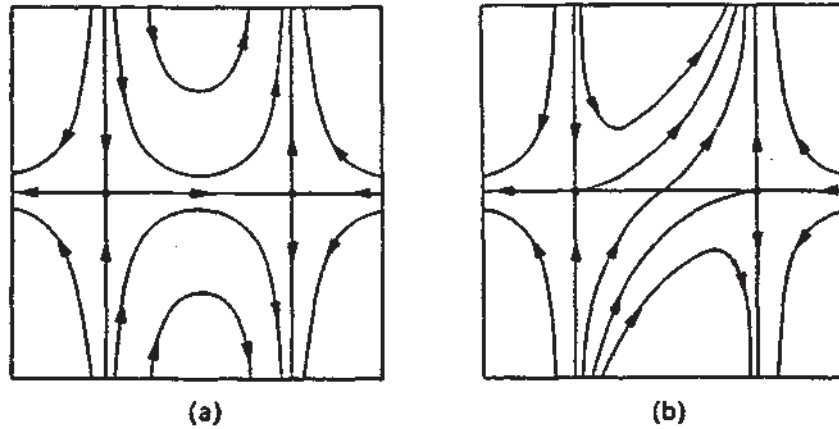
και

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= -2\bar{x} \\ \bar{y}' &= \bar{y}\end{aligned}\quad \text{στο } B \quad (6.3)$$

Από το Θεώρημα Γραμμικοποίησης προκύπτει ότι το (6.1) έχει σαγματικά σημεία στα A και B . Επιπλέον, οι μη γραμμικές διαχωρίζουσες αυτών των σαγματικών σημείων είναι εφαπτόμενες στις κύριες διευθύνσεις, στα A και B . Για τα (6.2) και (6.3) οι κύριες διευθύνσεις συμπίπτουν με τους τοπικούς άξονες συντεταγμένων.

Αυτές οι πληροφορίες είναι ανεπαρκείς για τον προσδιορισμό του ποιοτικού τύπου του ολικού διαγράμματος φάσεων. Το Σχ. 6.5 δείχνει δύο διαγράμματα φάσεων που είναι συμβιβαστά με την τοπική συμπεριφορά. Στο Σχ. 6.5 (a) τα δύο σαγματικά σημεία έχουν μια κοινή διαχωρίζουσα, ενώ στο Σχ. 6.5 (b) δεν έχουν. Αυτή είναι μια ποιοτική διαφορά: δεν υπάρχει συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση που συσχετίζει τα δύο διαγράμματα φάσεων.

Για το (6.1), παρατηρούμε ότι $x' \equiv 0$ επί των ευθειών $x=0$ και $x=2$ έτσι, ώστε οι τροχιές συμπίπτουν με αυτές τις ευθείες. Επιπλέον, $y' = 0$ όταν $y=0$. Έτσι προκύπτει ότι το Σχ. 6.5(a) δίνει το σωστό ποιοτικό τύπο διαγράμματος φάσεων.



Σχήμα 6.5.

7. Η ΑΜΕΣΗ Ή ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΛΥΑΡΟΥΝΟΝ

Είναι διαισθητικά φανερό, ότι αν η ολική ενέργεια ενός φυσικού συστήματος έχει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σημείο ισορροπίας, τότε αυτό το σημείο είναι ευσταθές. Αυτή η ιδέα γενικεύθηκε από τον Α.Μ. Λυαρουνον και αποτέλεσε μια απλή αλλά ισχυρή μέθοδο μελέτης προβλημάτων ευστάθειας. Πιο συγκεκριμένα, στην §5 το κύριο εργαλείο αντιμετώπισης θεμάτων σχετικών με τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού συστήματος, ήταν το θεώρημα Γραμμικοποίησης. Αυτό το θεώρημα μας έδινε αποτελέσματα μόνο όταν τα σημεία ισορροπίας ήταν απλά και δεν ήταν κέντρα. Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε μια μέθοδο που μας επιτρέπει την ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας σε ευσταθή, ασυμπτωτικά ευσταθή και ασταθή. Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 7.1. Η εξίσωση

$$\begin{aligned}u'' + u + g(u') &= 0 \\g(0) &= 0, \quad g'(0) > 0\end{aligned}$$

μετατρέπεται μέσω του γνωστού μετασχηματισμού

$$u = x, \quad u' = y$$

στο (μη γραμμικό) σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x - g(y)\end{aligned}$$

που έχει γραμμικοποιήσει την

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -g'(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Για τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 του προηγούμενου πίνακα ισχύει

- (i) αν $g'(0) > 0$ τότε $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ και $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$
- (ii) αν $g'(0) = 0$ τότε $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

Στην περίπτωση (ii) η μηδενική λύση του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ευσταθής, αλλά δεν μπορούμε να εξάγουμε κανένα

συμπέρασμα για το μη γραμμικό σύστημα, αφού το $(0,0)$ είναι κέντρο. Καταφεύγουμε τότε στην εξής μέθοδο:

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του μη γραμμικού συστήματος επί x , τη δεύτερη επί y και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) = xx' + yy' = -yg(y) \leq 0$$

αφού

$$g(0) = 0 \text{ και } g'(y) \geq 0$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η παράσταση $(x^2+y^2)(t)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση του t και συνεπώς

$$|(x,y)(t)| \leq |(x,y)(0)|$$

Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζει την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του μη γραμμικού συστήματος. Η συνάρτηση $(x^2+y^2)(t)$ αποτελεί μια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα. Ο προσδιορισμός μιας κατάλληλης συνάρτησης που θα μας επιτρέψει να αποφανθούμε για την ευστάθεια ενός συστήματος, είναι το δύσκολο πρακτικό χαρακτηριστικό της μεθόδου.

Έστω $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $V(x)$ μια βαθμωτή συνάρτηση των x_1, \dots, x_n .

Ορισμός 7.1. Η $V(x)$ λέγεται θετικά (αρνητικά) οριμένα σε μια περιοχή π του O , αν ισχύει $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$) για κάθε $x \neq O$ στην π και $V(O) = 0$.

Η $V(x)$ λέγεται θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη αν το " $>$ " (" $<$ ") του προηγούμενου ορισμού αντικατασταθεί με " \geq " (" \leq ").

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα

$$x' = f(x), \quad f = (f_1, \dots, f_n) \quad (7.1)$$

Ορισμός 7.2. Η ολική παράγωγος μιας συνάρτησης $V(x)$ κατά μήκος μιας τροχιάς γ του αυτόνομου συστήματος (7.1) που αντιστοιχεί σε μια λύση $x(t)$, είναι

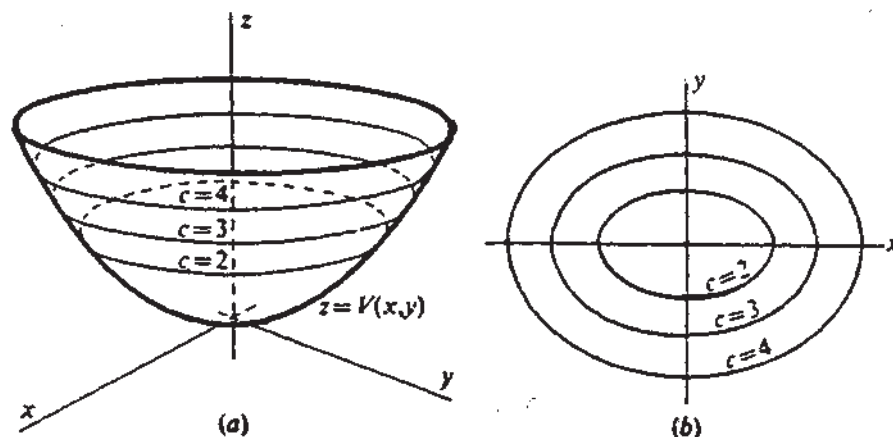
$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_\gamma = \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x})$$

Όταν χρησιμοποιούμε την V ως συνάρτηση της θέσης, γράφουμε $V'(\mathbf{x})$, όπου

$$V'(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x}) \quad (7.2)$$

και μπορούμε να λέμε ότι "η V είναι συνεχής" ή "η V' είναι θετικά ορισμένη" εννοώντας ως προς \mathbf{x} .

Έστω ότι η $V(\mathbf{x})$ είναι θετικά ορισμένη. Ένα απλό πρότυπο μιας τέτοιας συνάρτησης σε διάσταση 2, έχει σχεδιαστεί στο Σχ. 7.1 (α).

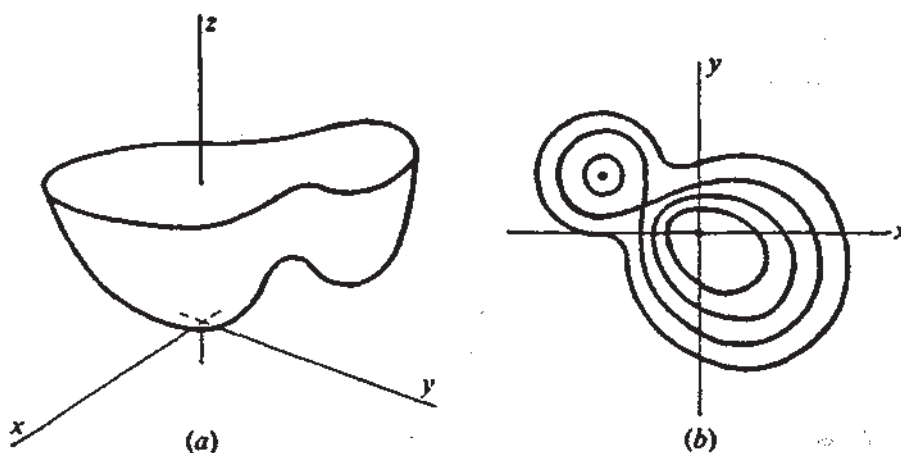


Σχήμα 7.1.

Οι ισοκλινείς καμπύλες $V(x, y) = c$ συνιστούν ένα σύστημα που αποτελείται από απλές κλειστές καμπύλες που περικλείουν το $(0, 0)$ και τείνουν στο $(0, 0)$ όταν $c \rightarrow 0$. Γενικώς, μια θετικά ορισμένη συνάρτηση, δεν είναι τόσο απλή· μπορεί να έχει μορφή όπως στο Σχ. 7.2 (α) με αρκετά ελάχιστα. Ακόμα και σε τέτοια περίπτωση, υπάρχει μια περιοχή του $(0, 0)$, στην οποία η V έχει την απλή δομή του Σχ. 7.1.

Στα θεωρήματα που ακολουθούν, περιοριζόμαστε σε τέτοιες, ακριβώς, περιοχές της αρχής των αξόνων. Σε μεγαλύτερη διάσταση, δεν μπορούμε να έχουμε εποπτεία, αλλά όταν η $V(\mathbf{x})$ είναι θετικά ορισμένη και έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε για κάθε αρκετά μικρό,

θετικό c και για x σε κάποια ικανοποιητικά μικρή περιοχή της αρχής των αξόνων, ισχύει ένα ανάλογο αποτέλεσμα.



Σχήμα 7.2.

Στο επόμενο θεώρημα, υποθέτουμε ότι όλες οι κατασκευές γίνονται σε μια περιοχή π^* της αρχής των αξόνων, που ορίζεται από τη σχέση

$$V(x) < c^*$$

για την οποία ισχύουν τα παραπάνω. Η οικογένεια περιοχών π_c που ορίζεται από τη σχέση $V(x) < c$, για μικρά c , αποτελεί ένα κατάλληλο μέσο για την αναγνώριση της ευστάθειας. Αντί για περιοχές $\|x\| < \varepsilon$, χρησιμοποιούμε περιοχές

$$V(x) < \varepsilon \leq c^*$$

Θεώρημα 7.1. Έστω $x(t) = 0, t \geq t_0$ η μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x), f(0) = 0 \quad (7.3)$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $V(x)$, με τις ακόλουθες ιδιότητες σε κάποια περιοχή π^* του $x=0$,

- (i) η $V(x)$ και οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς,
 - (ii) η $V(x)$ είναι θετικά ορισμένη,
 - (iii) η $V'(x)$ είναι αρνητικά ημιορισμένη,
- τότε η $x(t)$ είναι ευσταθής για $t \geq t_0$.

Αν η (iii) αντικατασταθεί από την ισχυρότερη συνθήκη (iii)' η $V'(x)$ είναι αρνητικά ορισμένη, τότε η $x(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $\pi_\varepsilon \subseteq \pi^*$. Λόγω της (iii), στην π_ε ισχύει ότι $V'(x) \leq 0$, και συνεπώς η V είναι μη αύξουσα ως προς t : έτσι, κάθε ημιτροχιά που αρχίζει μέσα στην π_ε , παραμένει μέσα της. Το ίδιο ισχύει για κάθε ικανοποιητικά μικρό ε και κατά συνέπεια για κάθε μικρή περιοχή της αρχής των αξόνων. Άρα η μηδενική λύση είναι ευσταθής.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος: αφού η V' είναι αρνητικά ορισμένη, η $V(x(t))$ θα φθίνει πάνω σε κάθε ημιτροχιά $x(t)$. Έτσι ή θα ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$ και όλες οι ημιτροχιές τείνουν στην αρχή των αξόνων, είτε θα υπάρχει μια (τουλάχιστον) ημιτροχιά $x(t)$ τέτοια, ώστε

$$V(x(t)) \geq m > 0, \forall t \geq t_0 \quad (7.4)$$

για κάποιο $m > 0$. Αφού η $x(t)$ είναι ευσταθής, υπάρχει μια περιοχή D ,

$$D: m \leq V(x) \leq c$$

που περιέχει αυτήν την ημιτροχιά. Η D είναι κλειστή και λόγω της (i) η V' είναι συνεχής επί της D , πράγμα που σημαίνει ότι η V' έχει το άνω φράγμα της στην D και αυτό είναι μια αρνητική σταθερά

$$V'(x) \leq -M < 0, x \in D, M > 0 \quad (7.5)$$

Ολοκληρώνοντας την (7.5) από t_0 ως t παίρνουμε

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) \leq -M(t - t_0) \quad \forall t > t_0$$

που αντιβαίνει στην (7.4). Έτσι $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = 0$.

Ορισμός 7.3. Μια συνάρτηση V που ικανοποιεί τις υποθέσεις (i), (ii) και (iii) του Θεωρήματος 7.1 λέγεται ασθενής συνάρτηση Lyapunou-

πον. Αν η (iii) αντικατασταθεί από την (iii)', τότε λέγεται ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.

Παράδειγμα 7.2. Θεωρούμε την εξίσωση

$$u'' + u + u' + (u')^3 = 0$$

Θέτοντας $u = x$, $u' = y$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y - y^3 \end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε την

$$V_1(x, y) = 1/2 (x^2 + y^2)$$

παρατηρούμε ότι

$$V_1'(x, y) = xx' + yy' = -y^2 - y^4 \leq 0$$

και έτσι η V_1 είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov και το σύστημα είναι ευσταθές. Η V_1 δεν προσφέρεται για τον έλεγχο της ασυμπτωτικής ευστάθειας. Αντιθέτως, για την

$$V_2(x, y) = 1/2 (x^2 + y^2) + \alpha xy$$

ισχύει

$$\begin{aligned} V_2'(x, y) &= -y^2 - y^4 + \alpha y^2 - \alpha x^2 - \alpha xy - \alpha xy^3 = \\ &= -2\alpha \frac{x^2}{2} - 2(1 - \alpha) \frac{y^2}{2} - y^4 - (1 + y^2)\alpha xy \leq \\ &\leq -\beta \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \alpha xy \right) = -\beta V_2(x, y) \end{aligned}$$

για κάποιο $\beta > 0$ και κατάλληλα επιλεγμένο α .

Έτσι η V_2 είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια.

Παρατηρούμε, ότι η ισχύς των αποτελεσμάτων εξαρτάται από την επιλογή της συνάρτησης Lyapunov.

Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να πάρουμε ασυμπτωτική ευστάθεια από συστήματα που έχουν μια ασθενή συνάρτηση Lyapunov. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 7.2. Αν υπάρχει μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov V για το σύστημα

$$x' = f(x)$$

σε μια περιοχή ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας στην αρχή των αξόνων, τότε, με την προϋπόθεση ότι η $V'(x)$ δεν μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω σε καμιά τροχιά, εκτός από το ίδιο το σημείο ισορροπίας, η αρχή των αξόνων είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Η απόδειξη βασίζεται στις ίδιες ιδέες με εκείνη του θεωρήματος 7.1 και γι' αυτό αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 7.3. Θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - (1-x^2)y \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $V(x,y) = x^2 + y^2$ είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapunov στον δίσκο $x^2 + y^2 < 1$, αφού $V'(x,y) = -2y^2(1-x^2)$. Η V' μηδενίζεται μόνο επί των ευθειών $y=0$ και $x=\pm 1$. Όμως δεν υπάρχουν τροχιές του συστήματος που να βρίσκονται πάνω σε αυτές τις ευθείες, αφού επί της $y=0$ ισχύει $y' = -x \neq 0$ και επί των $x=\pm 1$ ισχύει $x' = y \neq 0$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το $(0,0)$ είναι, συνεπώς, ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατήρηση 7.1. Μια επιπλέον πληροφορία που προκύπτει από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1, είναι ότι εκτός από τη μηδενική λύση, και όλες οι λύσεις που ξεκινούν μέσα από συγκεκριμένες περιοχές της αρχής των αξόνων, είναι ασυμπτωτικά ευσταθείς. Μια τέτοια περιοχή λέγεται πεδίο έλξης. Ένα πεδίο έλξης μπορεί να βρεθεί με τη διαδικασία προσδιορισμού της περιοχής στην οποία η V έχει την ιδιότητα της περιοχής που περιγράφεται στη σελίδα 64· γενικώς, όμως, δεν θα προσδιοριστεί έτσι το μέγιστο πεδίο έλξης, αφού αυτό εξαρτάται από την επιλογή της συγκεκριμένης συνάρτησης Lyapunov. Στο

Παράδειγμα 7.3 το πεδίο έλξης είναι το σύνολο $\{(x,y): x^2+y^2 < 1\}$. Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι η συνάρτηση

$$V(x,y) = x^2 + y^2$$

ορίζει μια ισχυρή συνάρτηση Lyaroupon, σε ολόκληρο το επίπεδο \mathbb{R}^2 , για το σύστημα

$$x' = -x-xy^2, \quad y' = -y-yx^2$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η ύπαρξη του πεδίου έλξης προκύπτει από το Θεώρημα Γραμμικοποίησης, αλλά αυτή η οπτική δεν δίνει καμιά ένδειξη για το μέγεθος του πεδίου έλξης.

Όπως παρατηρήσαμε και προηγουμένως, σε πολύπλοκες καταστάσεις η κατασκευή μιας κατάλληλης συνάρτησης Lyaroupon μπορεί να είναι δύσκολη. Σε αυτή την κατεύθυνση είναι συχνά χρήσιμη η επόμενη

Πρόταση 7.1. Η συνάρτηση $U(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ είναι θετικά ορισμένη τότε και μόνον τότε αν $a > 0$ και $b^2 - 4ac < 0$ και αρνητικά ορισμένη τότε και μόνο τότε αν $a < 0$ και $b^2 - 4ac < 0$.

Άπόδειξη. Αν $y=0$, έχουμε ότι $U(x,0) = ax^2$ και έτσι $U(x,0) > 0$ για $x \neq 0$, τότε και μόνο τότε αν $a > 0$. Αν $y \neq 0$, έχουμε

$$U(x,y) = y^2 \left\{ a \left(\frac{x}{y} \right)^2 + b \left(\frac{x}{y} \right) + c \right\}$$

Όταν $a > 0$, το πολυώνυμο ως προς x/y (που είναι θετικό για μεγάλο x/y) είναι θετικό για κάθε x/y τότε και μόνο τότε αν $b^2 - 4ac < 0$.

Για το δεύτερο μέρος της Πρότασης, αρκεί να θεωρήσουμε την $-U(x,y)$.

Η προσέγγιση της άμεσης μεθόδου του Lyaroupon μπορεί να τροποποιηθεί, έτσι, ώστε να ελέγχει την αστάθεια της μηδενικής λύσης. Σχετικά έχουμε το

Θεώρημα 7.3. Έστω $x(t)=0, t \geq t_0$ η μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x), \text{ όπου } f(0)=0$$

Αν υπάρχει μια συνάρτηση $U(x)$ τέτοια, ώστε σε κάποια περιοχή

$$\|x\| \leq k$$

να ισχύουν:

- (i) η $U(x)$ και οι μερικές παράγωγοι της είναι συνεχείς,
- (ii) $U(0)=0$,
- (iii) $U'(x)$ είναι θετικά ορισμένη για το σύστημα,
- (iv) σε κάθε περιοχή της αρχής των αξόνων, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο x στο οποίο $U(x)>0$, τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής.

Απόδειξη. Λόγω του (iv), για δεδομένο $\delta: 0<\delta<k$, υπάρχει x_δ τέτοιο, ώστε $0 < \|x_\delta\| < \delta$ και $U(x_\delta) > 0$. Έστω $x(\delta,t), t \geq t_0$ η λύση που ικανοποιεί την $x(\delta,t_0) = x_\delta$. Η τροχιά της δεν μπορεί να εισχωρήσει στην αρχή των αξόνων καθώς $t \rightarrow +\infty$, αφού $U(0)=0$, αλλά $U'(x) > 0, x \neq 0$. Αφού η U' είναι θετικά ορισμένη και συνεχής και αφού η τροχιά φράσσεται μακριά από την αρχή των αξόνων, υπάρχει ένας αριθμός $m>0$ τέτοιος, ώστε

$$U'(x(\delta,t)) \geq m > 0, t \geq t_0$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$\|x(\delta,t)\| \leq k$$

Συνεπώς

$$U(x(\delta, t)) - U(x(\delta, t_0)) = \int_{t_0}^t U'(x(\delta, t)) dt \geq m(t - t_0)$$

Η $U(x)$ ως συνεχής συνάρτηση φράσσεται επί της $\|x\| \leq k$. Όμως το δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι μη φραγμένο, που σημαίνει ότι η $x(\delta, t)$ δεν μπορεί να παραμένει εντός της $\|x\| \leq k$ και έτσι η τροχιά φθάνει το σύνορο $\|x\| = k$.

Συνεπώς, αν δοθεί τυχόν $\varepsilon: 0 < \varepsilon < k$, τότε για κάθε δ -οσοδήποτε μικρο-υπάρχει μια τουλάχιστον λύση $x(\delta, t)$ με $\|x(\delta, t_0)\| < \delta$, αλλά $\|x(\delta, t)\| > \varepsilon$ για κάποιο t . Η μηδενική λύση είναι, λοιπόν, ασταθής.

Παράδειγμα 7.4. Με τη χρήση της συνάρτησης

$$U(x, y) = ax^3 + \beta x^2 y + \gamma x^2 y + \delta y^3$$

για κατάλληλη επιλογή των σταθερών a, β, γ, δ , ναδειχτεί ότι το σύστημα

$$x' = x^2, \quad y' = 2y^2 - xy$$

είναι ασταθές στην αρχή των αξόνων.

Η παράγωγος της U κατά μήκος των τροχιών του συστήματος είναι

$$U'(x, y) = 3ax^4 + \beta x^3 y + (2\beta - \gamma)x^2 y^2 + (4\gamma - 3\delta)xy^3 + 6\delta y^4$$

Παρατηρούμε ότι επιλέγοντας

$$a = \frac{1}{3}, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 2, \quad \delta = \frac{4}{3}$$

έχουμε

$$U'(x, y) = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + 8y^4 = (x+y)^4 + 7y^4$$

που είναι, προφανώς, θετικά ορισμένη. Η συνάρτηση U δίνεται από τη σχέση

Αυτή η συνάρτηση έχει την ιδιότητα

$$U(x,y) = \frac{1}{3} x^3 + 4x^3y + 2xy^2 + \frac{4}{3} y^3$$

$$U(x,0) = \frac{1}{3} x^3$$

και έτσι υπάρχουν σημεία, επί του x -άξονα, οσοδήποτε κοντά στο $(0,0)$, για τα οποία η U είναι θετική. Από το Θεώρημα 7.3. έπεται ότι το $(0,0)$ είναι ασταθές.

Παράδειγμα 7.5. (Η εξίσωση Liénard). Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

όπου οι f και g είναι συνεχείς και

(i) η $f(x)$ είναι θετική σε μια περιοχή του μηδενός με εξαίρεση το μηδέν,

(ii) η $g(x)$ είναι θετική/αρνητική όταν το x είναι θετικό/αρνητικό (πράγμα που σημαίνει ότι $g(0) = 0$).

Αν θέσουμε

$$F(x) = \int_0^x f(u) du$$

η εξίσωση γράφεται ως σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned}$$

και ορίζοντας

$$G(x) = \int_0^x g(u) du$$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$V(x,y) = G(x) + \frac{1}{2} y^2$$

Αυτή είναι, προφανώς, θετικά ορισμένη και

$$V'(x,y) = g(x)x' + yy' = -g(x)F(x)$$

που είναι αρνητικά ορισμένη. Κατά συνέπεια η μηδενική λύση είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Παράδειγμα 7.6. (Προβλήματα Hamilton). Τα συντηρητικά προβλήματα, κυρίως της δυναμικής, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.6)$$

όπου η H είναι η λεγόμενη συνάρτηση Hamilton (Hamiltonian) του συστήματος, οι q_i είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες και οι p_i οι γενικευμένες ορμές, $i = 1, 2, \dots, n$. Η συνάρτηση Hamilton ορίζεται ως

$$H(p, q) = T(p, q) + V(q) \quad (7.7)$$

όπου T η κινητική και V η δυναμική ενέργεια: υποτίθεται ότι $V(0) = 0$. Η T είναι μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή ως προς p_i και έτσι $H(0, 0) = 0$.

Έστω ότι το $q = 0$ είναι ελάχιστο της $V(q)$, έτσι, ώστε η V και συνεπώς και η H , είναι θετικά ορισμένη σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Τότε

$$H'(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i' + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i' = 0$$

λόγω της (7.6).

Συνεπώς η H είναι μια ασθενής συνάρτηση Lyapounov για το σύστημα (7.6). Άρα η μηδενική λύση $p = 0, q = 0$, που είναι μια θέση ισορροπίας, είναι ευσταθής όταν βρίσκεται σε ένα ελάχιστο της V .

Έστω, τώρα, ότι το $q = 0$ είναι μέγιστο της V και ότι η V αναλύεται ως

$$V(\mathbf{q}) = \Pi_{\mu}(\mathbf{q}) + \Pi_{\mu+1}(\mathbf{q}) + \dots, \mu \geq 2$$

όπου το $\Pi_{\mu}(\mathbf{q})$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού $\mu \geq 1$ ως προς q_i . Θεωρούμε μια συνάρτηση U που ορίζεται ως

$$U(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad (7.8)$$

Τότε η U ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iv) του Θεωρήματος 7.3. Εξάλλου

$$\begin{aligned} U'(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^n p_i q_i' + \sum_{i=1}^n p_i' q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial T}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial T}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial V}{\partial q_i} = \\ &= 2T - \sum_{i=1}^n \frac{\partial T}{\partial q_i} - \mu \Pi_{\mu}(\mathbf{q}) - (\mu + 1) \Pi_{\mu+1}(\mathbf{q}) - \dots \end{aligned}$$

(έχει χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Euler για ομογενείς συναρτήσεις, για τις $T, \Pi_{\mu}, \Pi_{\mu+1}, \dots$). Οι κυρίαρχοι όροι της σειράς κοντά στο $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{0}$ είναι οι $2T - \mu \Pi_{\mu}(\mathbf{q})$. Αφού, εξ υποθέσεως, το Π_{μ} έχει μέγιστο στο $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ και η T είναι θετικά ορισμένη, η U' είναι αρνητικά ορισμένη σε μια περιοχή της αρχής των αξόνων. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.3, το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, όταν βρίσκεται σε ένα μέγιστο της V .

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου, επεκτείνουμε τη μελέτη των συναρτήσεων Lyapunov με μια λεπτομερέστερη συζήτηση για το πεδίο έλξης ενός ασυμπλωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας. Θα χρειαστούμε ορισμένες έννοιες της γεωμετρίας των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$x' = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.9)$$

και υποθέτουμε ότι $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, όπου Ω ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n .

Από το θεώρημα του Peano, έπεται ότι η οικογένεια όλων των ειδικών λύσεων της $x' = f(x)$, μπορεί να αναπαρασταθεί από τη λύση $\phi(t, x_0)$ του (7.9) θεωρούμενη ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, της $t \in I_{x_0}$ και της $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (I_{x_0} είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης λύσης (του (7.9))). Υπό αυτό το πρίσμα ιδωμένη, η $\phi(t, x_0)$ λέγεται ροή της $x' = f(x)$.

Το υποσύνολο του \mathbb{R}^{n+1} που ορίζεται ως

$$\{t, \phi(t, x_0)\}: t \in I_{x_0}\}$$

λέγεται **διαδρομή** (trajectory) που διέρχεται από το x_0 . Η διαδρομή εφάπτεται στα ευθύγραμμα τμήματα του πεδίου διευθύνσεων, σε κάθε σημείο του επιπέδου από το οποίο (σημείο) διέρχεται, όταν βρισκόμαστε στο \mathbb{R}^2 .

Ορίζουμε ως **θετική τροχιά**, $\gamma^+(x_0)$, **αρνητική τροχιά**, $\gamma^-(x_0)$, και **τροχιά**, $\gamma(x_0)$, του x_0 τα ακόλουθα σύνολα:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0) \quad (7.10)$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in [\alpha_{x_0}, 0)} \phi(t, x_0) \quad (7.11)$$

$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in [\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \phi(t, x_0) \quad (7.12)$$

όπου $I_{x_0} = (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$.

Είναι προφανές από αυτούς τους ορισμούς, ότι η τροχιά, $\gamma(x_0)$, είναι η προβολή της διαδρομής που διέρχεται από το x_0 επί του χώρου φάσεων.

Όταν το x είναι σημείο ισορροπίας της $x' = f(x)$, τότε -εξ ορισμού- $f(x) = 0$ και έτσι η σταθερή συνάρτηση $x(t) = x$ είναι λύση για κάθε t . Συνεπώς $\gamma(x) = x$.

Είναι εύκολο (και αφήνεται ως άσκηση) να δειχτεί το ακόλουθο

Λήμμα 7.1. Υποθέτουμε ότι η λύση, $\phi(t, x_0)$, του προβλήματος αρχικών τιμών

$$x' = f(x) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

είναι μοναδική για κάθε x_0 . Τότε

- (i) η $\phi(t, x_0)$ είναι μονότονη συνάρτηση του t ,
- (ii) αν $x_0 < y_0$, τότε $\phi(t, x_0) < \phi(t, y_0)$ για κάθε t ,
- (iii) αν η $\gamma^+(x_0)$ (αντιστ. η $\gamma^-(x_0)$) είναι φραγμένη, τότε $\beta_{x_0} = +\infty$ (αντιστ. $\alpha_{x_0} = -\infty$) και

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x_0) = \bar{x} \quad (\text{αντιστ.} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x_0) = \bar{x})$$

όπου \bar{x} ένα σημείο ισορροπίας.

Ο προσδιορισμός των σημείων εκκίνησης και κατάληξης των τροχιών είναι ένα σημαντικό πρόβλημα και γι'αυτό εισάγουμε τις ακόλουθες έννοιες.

Ορισμός 7.4. Αν η $\gamma^-(x_0)$ είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\alpha(x_0) := \left\{ p : \exists (t_k) \text{ με } \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = -\infty \text{ ώστε } \lim_{k \rightarrow -\infty} \phi(t_k, x_0) = p \right\}$$

(7.13)

λέγεται το α -οριακό σύνολο του x_0 .

Ομοίως, αν η $\gamma^+(x_0)$ είναι φραγμένη, τότε το σύνολο

$$\omega(x_0) := \left\{ q : \exists (t_k) \text{ με } \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \infty \text{ ώστε } \lim_{k \rightarrow -\infty} \phi(t_k, x_0) = q \right\}$$

(7.14)

λέγεται το ω -οριακό σύνολο του x_0 .

Με βάση αυτόν τον ορισμό το (iii) του Λήμματος 7.1 μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: τα οριακά σύνολα $\alpha(x_0)$ και $\omega(x_0)$, αν υπάρχουν, είναι σημεία ισορροπίας.

Αυτή η "παράξενη" ορολογία (που είναι διεθνής), προέρχεται από το ότι το α και το ω είναι το πρώτο και το τελευταίο γράμμα του αλφαβήτου μας.

Ορισμός 7.5. Ένα υποσύνολο M του \mathbb{R}^n λέγεται αναλλοίωτο για το σύστημα (7.9), αν για κάθε $x_0 \in M$ η τροχιά $\gamma(x_0)$, που διέρχεται από το x_0 , ανήκει στο M . Συμβολικά: $\phi(t, M) = M$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του θετικά ($\gamma^+(x_0)$ αντί για $\gamma(x_0)$) και, φυσικά, $t \in \mathbb{R}^+$ αντί για $t \in \mathbb{R}$) αναλλοίωτου και του αρνητικά αναλλοίωτου υποσύνολου.

Στο επόμενο θεώρημα δίνονται μερικές από τις σημαντικές τοπολογικές ιδιότητες των οριακών συνόλων.

Θεώρημα 7.4. Το α - και το ω -οριακό σύνολο μίας τροχιάς γ είναι κλειστά και αναλλοίωτα. Αν επιπλέον η γ^+ (αντιστ. η γ^-) είναι φραγμένη, τότε το ω -οριακό (αντιστ. το α -οριακό) σύνολο είναι μη κενό, συμπαγές και συνεκτικό.

Απόδειξη. Αν $t_n \rightarrow +\infty$, τότε η $\{\phi(t_n, x)\}$ έχει ένα οριακό σημείο, έστω y , και $y \in \omega(x)$: συνεπώς το $\omega(x)$ είναι μη κενό.

Η κλειστότητα είναι προφανής, αφού εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι

$$\omega(\gamma) = \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma^+(p)} = \bigcap_{t \in (-\infty, +\infty)} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \phi(t, p)} \quad (7.15)$$

και

$$\alpha(\gamma) = \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma^-(p)} = \bigcap_{t \in (-\infty, +\infty)} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \phi(t, p)} \quad (7.16)$$

Αν η γ^+ είναι φραγμένη, τότε το $\omega(\gamma)$ είναι συμπαγές, ως κλειστό και φραγμένο.

Για το αναλλοίωτο, θεωρούμε $x_0 \in \gamma$ και $y \in \omega(x_0)$: τότε υπάρχει ακολουθία (t_n) , $t_n \rightarrow +\infty$, τέτοια ώστε $\phi(t_n, x_0) \rightarrow y$ όταν $n \rightarrow +\infty$. Συνεπώς, για οποιοδήποτε $t \in (-\infty, +\infty)$ έχουμε

$$\phi(t+t_n, x_0) = \phi(t, \phi(t_n, x_0)) \rightarrow \phi(t, y) \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty \quad (7.17)$$

λόγω της συνέχειας της ϕ . (Η ισότητα ισχύει γιατί, ως γνωστό

$\phi(0,x) = x$ και $\phi(0+t_n, x_0) = \phi(t_n, x_0)$ και $\phi(0, \phi(t_n, x_0)) = \phi(t_n, x_0)$ και έχουμε υποθέσει το μονοσήμαντο των λύσεων για το (7.9)). Από την (7.17) έπεται ότι $\gamma(y) \in \omega(x_0)$, που αποδεικνύει το αναλλοίωτο του $\omega(x_0)$.

Έστω, τέλος, ότι το $\omega(x_0)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν δύο ξένα, κλειστά και συμπαγή σύνολα A και B , ώστε $\omega(x_0) = A \cup B$. Συνεπώς $d(A,B) > 0$.

Έστω $d(A,B) = \rho$. Έστω $y_1 \in A$, $y_2 \in B$. Επιλέγουμε ακολουθίες (t_n) και (s_n) τέτοιες, ώστε $\phi(t_n, x_0) \rightarrow y_1$ και $\phi(s_n, x_0) \rightarrow y_2$,

$$d(\phi(t_n, x_0), y_1) < \frac{\rho}{3} \quad \text{και} \quad d(\phi(s_n, x_0), y_2) < \frac{\rho}{3}$$

και να ισχύει

$$t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_j < s_j < t_{j+1} < s_{j+1} < \dots$$

Θεωρούμε το τόξο

$$\{\phi(t, x_0) : t_n \leq t \leq s_n\}$$

το οποίο συνδέει δύο συνιστώσες και, ως εκ τούτου, δεν μπορεί να ανήκει στο $\omega(x_0)$. Υπάρχει, συνεπώς, \bar{t}_n τέτοιο, ώστε

$$d(\phi(\bar{t}_n, x_0), \omega(x_0)) \geq \frac{\rho}{3}$$

και

$$\bar{t}_n \rightarrow +\infty$$

,άτοπο.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ορολογία, μπορούμε να διατυπώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 7.5. (Αρχή Αναλλοίωτου του LaSalle). Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση $x' = f(x)$ με $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Έστω V μια συνάρτηση τέτοια, ώστε το σύνολο $U := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < k\}$, $k \in \mathbb{R}$, να είναι ανοιχτό. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η V είναι συνεχής στο U και C^1 -διαφορίσιμη στο U , με $V'(x) \leq 0$ για $x \in U$. Θεωρούμε το υποσύνολο S του U που ορίζεται ως

$$S := \{x \in U : V'(x) = 0\}$$

και έστω M το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο στο S . Τότε κάθε θετική τροχιά που ξεκινά από το U και παραμένει φραγμένη, έχει το ω -οριακό σύνολο της εντός του M .

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in U$, $\phi(t, x_0)$ η λύση που διέρχεται από το x_0 , για την οποία υποθέτουμε ότι είναι φραγμένη για $t \geq 0$. Τότε $V'(\phi(t, x_0)) \leq 0$ και συνεπώς $V(\phi(t, x_0)) \leq V(x_0) \leq k, \forall t \geq 0$. Άρα, για κάθε $t \geq 0, \phi(t, x_0) \in U$. Επιπλέον $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi(t, x_0)) = u, u \in \mathbb{R}$. Η συνέχεια

της V , συνεπάγεται ότι $V(y) = u, \forall t \in \mathbb{R}$. Έτσι $V'(\phi(t, y)) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ και $\omega(x_0) \subset S$. Από το αναλλοίωτο του $\omega(x_0)$ έπεται ότι $\omega(x_0) \subset M$.

Πόρισμα 7.1. Αν επιπλέον, κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη, η V είναι θετικά ορισμένη και $M = \{0\}$, τότε το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και ολόκληρο το U ανήκει στο πεδίο έλξης.

Πόρισμα 7.2. Αν, επιπλέον, κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη και η V είναι θετικά ορισμένη για $x \in U \setminus \{0\}$, τότε $M = \{0\}$.

Θεώρημα 7.6. Αν η V είναι μια C^1 -διαφορίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε $V(x) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|x\| \rightarrow +\infty$ και $V'(x) \leq 0$ για όλα τα x , τότε κάθε θετική τροχιά είναι φραγμένη και το ω -οριακό σύνολο της ανήκει στο M , το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο του $\{x: V'(x) = 0\}$.

Παράδειγμα 7.7. Θεωρούμε το σύστημα

$$x' = -y$$

$$y' = x - y \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{x^2 + y^2} \right)$$

Είναι προφανές ότι το $(0,0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας καθώς και ότι η $x(t) = \cos t, y(t) = \eta \sin t$ είναι λύση. Συνεπώς ο μοναδιαίος κύκλος, $x^2 + y^2 = 1$, είναι τροχιά του συστήματος. Λόγω του μονοσήμαντου, το $U = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$ είναι αναλλοίωτο. Η συνάρτηση $V: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ με $V(x,y) = 1/2 (x^2 + y^2)$ έχει την ιδιότητα

$$V'(x,y) = xx' + yy' = -y^2 \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{x^2 + y^2} \right) \leq 0$$

και επιπλέον

$$V'(x,y) = 0 \rightarrow y = 0 \quad \eta \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

οπότε
όπου

$$S = S_1 \cup S_2,$$

$$S_1 = \{(x,0) : x \in [-1,1]\} \quad , \quad S_2 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 = \frac{1}{m} \right\}$$

Αν κάποια τροχιά περιέχεται στο S_1 , τότε $y(t) = 0$, δηλ. $y'(t) = 0$ και συνεπώς $x(t) = 0$. Το μόνο αναλλοίωτο σύνολο, συνεπώς, που περιέχεται στο S_1 είναι το $\{(0,0)\}$. Εξάλλου, κάθε σύνολο

$$A_m := \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 = \frac{1}{m} \right\} \quad \text{περιέχεται στο } \bar{U} \text{ και αποτελεί τροχιά}$$

(αφού η $x(t) = \frac{1}{m} \cos t$, $y(t) = \frac{1}{m} \eta \mu t$ είναι λύση) και είναι, ως εκ τούτου, αναλλοίωτο. Συνεπώς

$$M = \{0,0\} \cup S_2$$

Κάθε ένα από τα σύνολα που συνιστούν το M είναι ω -οριακό σύνολο. Προφανώς $\omega(\{0,0\}) = \{(0,0)\}$. Για τα υπόλοιπα (αφού

$$S_2 = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \quad), \quad \text{θεωρούμε κάποιο } A_m \text{ και έστω } (x_0, y_0) \in A_m. \text{ Τότε,}$$

προφανώς $\omega((x_0, y_0)) \subset A_m$. Εξάλλου, υπάρχει t_0 τέτοιο ώστε η

$$\phi_m(t_0) := \left(\frac{1}{m} \cos t, \frac{1}{m} \eta \mu t \right) \quad , \quad \text{για την οποία ισχύει } \phi_m(t_0) = t_0 \phi_m(0), \text{ να}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\phi_m(t_0) = (x_0, y_0)$$

Έστω $t_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε $t_k \rightarrow +\infty$

$$t_k(x_0, y_0) = t_k(t_0 \phi_m(0)) = t_0(t_k \phi_m(0)) = t_0 \phi_m(t_k) = t_0 \phi_m(0) = (x_0, y_0)$$

από όπου συνάγεται ότι

$$(x_0, y_0) \in \omega((x_0, y_0)) \text{ δηλ. } A_m \subset \omega((x_0, y_0))$$

Έτσι, τελικά, $\omega((x_0, y_0)) = A_m$.

Από το Θεώρημα 7.5 προκύπτει ότι δεν υπάρχουν άλλα ω -οριακά σύνολα, που να περιέχονται στο \bar{U} .

Έστω, τέλος, R ο δακτύλιος που περιέχεται μεταξύ του A_{m+1} και του A_m . Έστω $(x_0, y_0) \in R$. Τότε, επειδή

$$\frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = -2y^2 \eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{x^2 + y^2} \right) \leq 0 \quad \text{η απόσταση του } (x(t), y(t)) \text{ από}$$

το (x_0, y_0) μειώνεται, καθώς αυξάνεται το t , έχουμε ότι η $\gamma^+((x_0, y_0))$ τείνει στον κύκλο A_{m+1} . Εξάλλου αν $(x_0, y_0) \in A_m$ τότε ισχύει ότι $\gamma((x_0, y_0)) = A_m$ και $\gamma((0,0)) = \{(0,0)\}$.

Παράδειγμα 7.8. Η εξίσωση $x'' + 2ax' + x + x^3 = 0$, $a \in (0,1)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - x^3 - 2ay \end{aligned}$$

Το $(0,0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας και οι ιδιοτιμές της γραμμικοποίησης στο $(0,0)$ είναι $-a \pm i\sqrt{1-a^2}$. Το $(0,0)$ είναι, συνεπώς, ασυμπτωτικά ευσταθές. θα βρούμε το πεδίο έλξης, χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση Lyapunov.

Όταν $a=0$, το σύστημα είναι συντηρητικό, με ενέργεια

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1}{4} x^4$$

Ένας απλός υπολογισμός, δίνει ότι

$$V'(x,y) = -2ay^2$$

Έτσι, λοιπόν, αφού $V(x,y) \rightarrow +\infty$ καθώς $\|(x,y)\| \rightarrow +\infty$ για κάθε k , παίρνουμε ότι όλα τα σύνολα U της διατύπωσης του Θεωρήματος 7.5 είναι φραγμένα. Εξάλλου, είναι προφανές ότι το S περιέχεται στον x -άξονα. Θα προσδιορίσουμε το μέγιστο αναλλοίωτο σύνολο M του x -άξονα. Αφού το M είναι αναλλοίωτο, αρκεί να εργασθούμε μόνο με τις λύσεις του συστήματος, που παραμένουν στον x -άξονα για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $x' = 0$, δηλ. $x = \text{σταθ}$. Η δεύτερη εξίσωση μας δίνει ότι $x = 0$, και συνεπώς $M = \{(0,0)\}$. Από το Πόρισμα 7.1 έπεται ότι το πεδίο έλξης της αρχής των αξόνων είναι ολόκληρο το \mathbb{R}^2 .

8. ΠΡΩΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η ύπαρξη μιας συνάρτησης V με $V' = 0$, μας έδωσε ορισμένες σημαντικές πληροφορίες για την ποιοτική μας ανάλυση.

Ορισμός 8.1. Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος $x' = f(x)$, $x \in S \subseteq \mathbb{R}^2$, επί του $D \subseteq S$, αν η $g(x(t))$ είναι σταθερή για κάθε λύση $x(t)$ του συστήματος.

Από την ύπαρξη ενός πρώτου ολοκληρώματος, δεν προκύπτει η μοναδικότητα του. Αντιθέτως, αν $g(x)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα, το ίδιο συμβαίνει και για το $g(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Η σταθερά c συχνά χρησιμεύει ώστε με την κατάλληλη επιλογή της, το πρώτο ολοκλήρωμα να παίρνει μια επιθυμητή τιμή για $x = 0$. Το τετριμμένο πρώτο ολοκλήρωμα, που είναι ταυτοτικά σταθερό επί του D , δεν μας ενδιαφέρει.

Το γεγονός ότι η g είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα για την εξίσωση $x' = f(x)$, μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των (συνεχών) πρώτων μερικών παραγώγων της g . Αφού η g είναι σταθερή πάνω σε κάθε λύση $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ του συστήματος έχουμε

$$0 = \frac{d}{dt} g(x(t)) = x_1'(t) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t)) + x_2'(t) \frac{\partial g}{\partial x_2}(x(t)) \quad (8.1)$$

$$= f_1(x(t)) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t)) + f_2(x(t)) \frac{\partial g}{\partial x_2}(x(t)) \quad (8.2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(x + hf(x)) - g(x)}{h} \right)_{x = x(t)} \quad (8.3)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει σε κάθε σημείο του D και έτσι η κατευθυνόμενη παράγωγος της g κατά μήκος του διανυσματικού πεδίου f είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν επί του D .

Τα πρώτα ολοκληρώματα είναι χρήσιμα λόγω της σχέσης μεταξύ των επιπέδων καμπύλων τους (που ορίζονται από τη σχέση $g(x) = \text{σταθ.}$) και των τροχιών του συστήματος. Θεωρούμε την επίπεδη καμπύλη $L_c = \{x: g(x) = c\}$. Έστω $x_0 \in L_c$ και $\gamma(t)$ η τροχιά που διέρχεται από το x_0 στο επίπεδο φάσεων. Αφού η g είναι πρώτο ολοκλήρωμα,

$$g(\gamma(t)) = g(x_0) = c$$

Η τροχιά, συνεπώς, που διέρχεται από το x_0 βρίσκεται στην L_c .

Όταν η g είναι πρώτο ολοκλήρωμα, είναι σταθερή πάνω σε κάθε τροχιά στο D . Κάθε τροχιά είναι, λοιπόν, μέρος κάποιας επίπεδης καμπύλης της g . Ως εκ τούτου, κάθε επίπεδη καμπύλη είναι ένωση τροχιών· το μονοσήμαντο των λύσεων του συστήματος, εξασφαλίζει ότι οι "συνιστώσες" αυτής της ένωσης είναι ξένες μεταξύ τους.

Τα πρώτα ολοκληρώματα ονομάζονται έτσι, επειδή συνήθως προκύπτουν από ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης

$$\bullet \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad (x_1, x_2) \in \tilde{D} \subset S \quad (8.4)$$

Αν οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ικανοποιούν τη σχέση

$$g(x_1, x_2) = c \quad (8.5)$$

όπου $g: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$, τότε η g είναι πρώτο ολοκλήρωμα της $x' = f(x)$ επί του \tilde{D} . Πράγματι

$$0 \equiv \frac{dg}{dx_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} \quad (8.6)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $\frac{dx_2}{dx_1}$ από την (8.4) και πολλαπλασιάζοντας επί $f_1(x_1, x_2)$, παίρνουμε την (8.2). Φυσικά η f_1 δεν μπορεί να μηδενίζεται επί του \tilde{D} , αλλιώς η (8.4) δεν θα όριζε την $\frac{dx_2}{dx_1}$. Αντιθέ-

τως, τα σημεία που μηδενίζεται η f_1 δεν δημιουργούν πρόβλημα στην (8.2). Έτσι, αν η $g(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα υπερσύνολο D του \tilde{D} και ικανοποιείται η (8.4) στο D , τότε η g είναι πρώτο ολοκλήρωμα της $x' = f(x)$ επί του D .

Ορισμός 8.2. Ένα σύστημα που έχει πρώτο ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το επίπεδο (δηλ. $D = \mathbb{R}^2$) λέγεται **συντηρητικό**.

Παράδειγμα 8.1. Το σύστημα

$$x_1' = -x_2, \quad x_2' = x_1 \quad (8.7)$$

είναι συντηρητικό, πράγμα που δεν συμβαίνει για το σύστημα

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 \quad (8.8)$$

Η διαφορική εξίσωση (8.4) δίνει για το (8.7) την

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0 \quad (8.9)$$

της οποίας οι λύσεις ικανοποιούν την

$$x_1^2 + x_2^2 = c, \quad x_2 \neq 0, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (8.10)$$

Όμως η (8.2), με

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (8.11)$$

ικανοποιείται για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Η (8.11) είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα του (8.7) σε ολόκληρο το επίπεδο και έτσι το σύστημα (8.7) είναι συντηρητικό.

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.12)$$

που παίρνουμε από την (8.4) για το (8.8), έχει λύσεις

$$x_2 = cx_1, \quad c \in \mathbb{R} \quad (8.13)$$

Σε αυτή την περίπτωση η (8.2) ικανοποιείται από την

$$g(x) = \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.14)$$

και έτσι $\bar{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Δεν υπάρχει τρόπος επέκτασης του \bar{D} . Η μόνη συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το \mathbb{R}^2 , που είναι σταθερή πάνω σε κάθε τροχιά του (8.8) (πάνω, δηλ., στο (0,0) και σε κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το (0,0), μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία σημείων

(x_j) τέτοια, ώστε $\lim_{j \rightarrow +\infty} x_j = 0$. Λόγω της συνέχειας, $g(x_j) = g(0)$ για

κάθε j .

Δεν υπάρχει, συνεπώς, πρώτο ολοκλήρωμα σε ολόκληρο το \mathbb{R}^2 και έτσι το (8.8) δεν είναι συντηρητικό σύστημα.

Τα πρώτα ολοκληρώματα είναι ένας από τους κύριους τρόπους για την εξακρίβωση του αν κάποιο σημείο ισορροπίας είναι κέντρο για ένα μη γραμμικό σύστημα.

Παράδειγμα 8.2. Να δειχθεί ότι το (1,1) είναι κέντρο για το σύστημα

$$x_1' = x_1(1-x_2), \quad x_2' = x_2(x_1-1) \quad (8.15)$$

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(x_1-1)}{x_1(1-x_2)}, \quad x_1 \neq x_1x_2 \quad (8.16)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών και οι λύσεις της ικανοποιούν τη σχέση

$$h(x_1)h(x_2) = c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (8.17)$$

όπου

$$h(x) = xe^{-x} \quad (8.18)$$

Η h έχει μέγιστο για $x=1$ και $h(1)=1/e$. Έπεται λοιπόν ότι το σημείο $(1,1)$ είναι μέγιστο για το πρώτο ολοκλήρωμα

$$g(x_1, x_2) = h(x_1)h(x_2) \quad (8.19)$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια περιοχή του $(1,1)$, στην οποία οι επίπεδες καμπύλες της $g(x_1, x_2)$ είναι κλειστές. Αφού αυτές οι επίπεδες καμπύλες συμπίπτουν με τροχιές, συμπεραίνουμε ότι το $(1,1)$ είναι κέντρο.

Είναι, τέλος, σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι τα πρώτα ολοκληρώματα δεν μας δίνουν τις λύσεις $x(t)$ ενός συστήματος· εκείνο που κάνουν, είναι ότι μας δίνουν το σχήμα των τροχιών.

Παράδειγμα 8.3. Ναδειχθεί ότι τα συστήματα

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_2 \quad (8.19)$$

και
$$x_1' = x_1(1-x_2), \quad x_2' = x_2(x_2-1) \quad (8.20)$$

έχουν το ίδιο πρώτο ολοκλήρωμα και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσεων τους.

Οι τροχιές και των δύο συστημάτων βρίσκονται πάνω στις λύσεις της

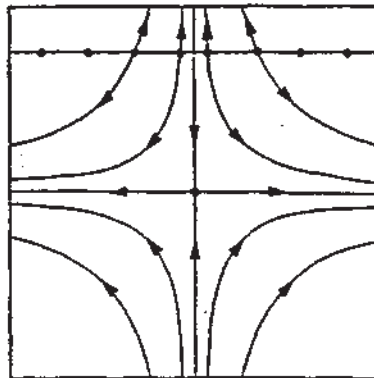
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0 \quad (8.21)$$

και, επίσης, έχουν και τα δύο ως πρώτο ολοκλήρωμα στο \mathbb{R}^2 , την

$$g(x) = x_1 x_2 \quad (8.22)$$

Οι επίπεδες καμπύλες της g είναι υπερβολές, που -για το (8.19)- μπορούν να προσανατολισθούν παρατηρώντας τη διεύθυνση του x' επί των αξόνων. Πρόκειται για το γνωστό μας γραμμικό σαγματικό σημείο (πρβ. Σχ. 4.2, σελ. 37).

Το σύστημα (8.20) έχει σημεία ισορροπίας στο $(0,0)$ και παντού επί της ευθείας $x_2=1$.



Σχήμα 8.1.

Επιπλέον, για $x_2 > 1$ και $x_2 < 0$ έχουμε $x_2' > 0$, ενώ για $0 < x_2 < 1$ έχουμε $x_2' < 0$. Κατά συνέπεια, το διάγραμμα φάσεων είναι αυτό του Σχ. 8.1.

Παρατήρηση 8.1. Τα συντηρητικά συστήματα παίζουν σημαντικό ρόλο σε προβλήματα μηχανικής. Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να κατασκευαστούν από τη συνάρτηση Hamilton (προβλ. σελ. 72). Σε μια διάσταση, ένα κινούμενο σωματίδιο με συντεταγμένη θέσης x , ορμή p και συνάρτηση Hamilton $H(x,p)$ έχει εξισώσεις κίνησης

$$x' = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x} \quad (8.23)$$

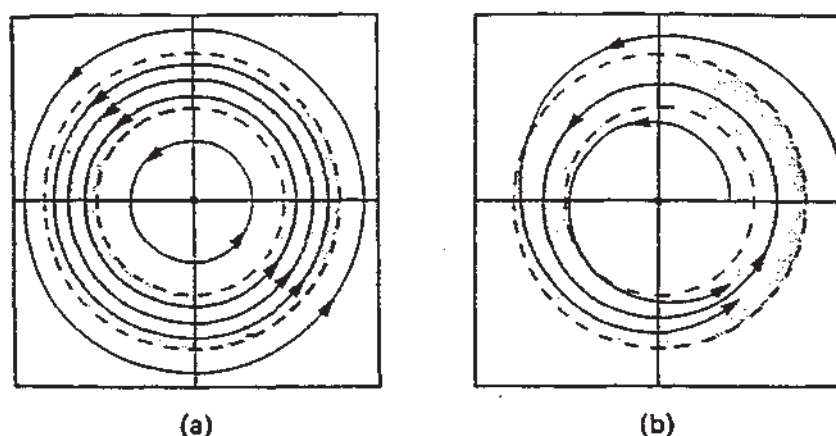
Εδώ η $H(x,p)$ είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα για το (8.23), αφού

$$\frac{d}{dt} H(x,p) \equiv 0, \quad \text{και η } H \text{ παραμένει σταθερή κατά μήκος των τροχιών.}$$

9. ΥΠΑΡΞΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

Ορισμός 9.1. Μια κλειστή τροχιά C σε ένα διάγραμμα φάσεων λέγεται οριακός κύκλος αν είναι απομονωμένη από όλες τις άλλες κλειστές τροχιές· ακριβέστερα, αν υπάρχει μια σωληνοειδής περιοχή της C που δεν περιέχει άλλες κλειστές τροχιές.

Η διάκριση ενός οριακού κύκλου από ένα κέντρο, φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Σχήμα 9.1.

Στο Σχ. 9.1 η σωληνοειδής περιοχή έχει ληφθεί ως ένας κυκλικός δακτύλιος. Στο Σχ. 9.1 (a) έχουμε ένα κέντρο και οι κλειστές τροχιές δεν είναι απομονωμένες. Στο Σχ. 9.1 (b), αντιθέτως, ο οριακός κύκλος είναι η μόνη κλειστή τροχιά μέσα στη σωληνοειδή περιοχή.

Παράδειγμα 9.1. Ναδειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned}x' &= -y + x[1 - \sqrt{x^2 + y^2}] \\y' &= x + y[1 - \sqrt{x^2 + y^2}]\end{aligned}\tag{9.1}$$

έχει έναν οριακό κύκλο, που δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 = 1$.

Σε πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, η (9.1) γίνεται

$$r' = r(1-r), \quad \theta' = 1\tag{9.2}$$

Προφανώς, η $r(t) \equiv 1$, $\Theta(t) = t$ είναι μια λύση που δίνει μια κλειστή τροχιά που αποτελείται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ που διατρέχεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\Theta' = 1$ και με φορά αντίθετη από εκείνη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Για $r \in (0,1)$, έχουμε $r' > 0$ και οι τροχιές σε αυτή την περιοχή κινούνται ελικοειδώς προς τα έξω, προς τον κύκλο $r=1$. Όταν $r > 1$, έχουμε $r' < 0$ και οι τροχιές κινούνται ελικοειδώς προς τα μέσα, καθώς αυξάνει ο χρόνος. Το διάγραμμα φάσεων είναι ποιοτικά ισοδύναμο με αυτό του Σχ. 9.1 (b), με οριακό κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Οι οριακοί κύκλοι δεν παρουσιάζουν όλοι την ίδια συμπεριφορά με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος. Υπάρχουν τρεις τύποι:

Ορισμός 9.2. (i) **Ευσταθής** (ή **ελκυστικός**) οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την κλειστή τροχιά και από τις δύο πλευρές καθώς $t \rightarrow \infty$.

(ii) **Ασταθής** (ή **απωθητικός**) οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς απομακρυνόμενες από την κλειστή τροχιά και από τις δύο πλευρές.

(iii) **Ημιευσταθής** οριακός κύκλος, είναι εκείνος για τον οποίο οι τροχιές κινούνται σπειροειδώς προς την κλειστή τροχιά, από τη μια πλευρά και σπειροειδώς απομακρυνόμενες από την κλειστή τροχιά, από την άλλη πλευρά.

Παράδειγμα 4.2. Να βρεθούν οι οριακοί κύκλοι και οι τύποι τους, για τα συστήματα:

$$(\alpha) \quad r' = r(r-1)(r-2), \quad \Theta' = 1$$

$$(\beta) \quad r' = r(r-1)^2, \quad \Theta' = 1$$

(α) Οι κλειστές τροχιές δίνονται από τις σχέσεις

$$(i) \quad r(t) \equiv 1, \quad \Theta(t) = t$$

$$(ii) \quad r(t) \equiv 2, \quad \Theta(t) = t$$

και ισχύει

$$r'(t) \begin{cases} > 0, & r(t) \in (0,1) \cup (2, +\infty) \\ < 0, & r(t) \in (1,2) \end{cases}$$

Το σύστημα έχει, κατά συνέπεια, δύο κυκλικούς οριακούς κύκλους: ο ένας είναι ευσταθής ($r=1$) και ο άλλος ασταθής ($r=2$).

(β) Το σύστημα έχει έναν κυκλικό οριακό κύκλο ($r=1$). Επειδή ισχύει

$$r'(t) > 0, r(t) \in (0,1) \cup (1, +\infty)$$

ο οριακός αυτός κύκλος είναι ημιευσταθής.

Παρατήρηση 9.1. Οι οριακοί κύκλοι δεν είναι πάντα κυκλικοί και έτσι η προσφυγή σε πολικές συντεταγμένες δεν τους αποκαλύπτει πάντοτε. Για παράδειγμα η εξίσωση Van der Pol:

$$x'' - (1-x^2)x' + x = 0$$

ισοδυναμεί με το σύστημα

$$x' = y, y' = x(1-x^2) - x$$

που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r' = r^2 \sin^2 \Theta (1 - r^2 \sin^2 \Theta), \Theta' = \sin \Theta \cos \Theta (1 - r^2 \sin^2 \Theta) - 1$$

Αυτές οι εξισώσεις δεν δίνουν άμεσα καμιά πληροφορία για τη φύση του διαγράμματος φάσεων (που είναι γνωστό ότι περιέχει έναν μοναδικό ευσταθή οριακό κύκλο).

Γενικώς, δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα είμαστε σε θέση να διαπιστώνουμε ότι ένα σύστημα έχει οριακό κύκλο με το να τον βρίσκουμε, όπως στο Παράδειγμα 9.2. Θα δώσουμε, στη συνέχεια, ορισμένα αποτελέσματα, που μας επιτρέπουν να συμπεραίνουμε ότι σε κάποιες περιοχές του επιπέδου φάσεων περιέχονται ή όχι οριακοί κύκλοι.

Θεωρούμε το σύστημα

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2) \quad (9.3)$$

και υποθέτουμε ότι οι $f_j, j=1,2$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες σε όλο το \mathbb{R}^2 .

Έστω C μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο φάσεων που δεν διέρχεται από κανένα σημείο ισορροπίας του (9.3). Έτσι, αφού $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ επί της C , το διάνυσμα $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ ορίζει μια μοναδική διεύθυνση σε κάθε σημείο (x_1, x_2) της C . Αυτή η διεύθυνση δεν είναι παρά η διεύθυνση της μοναδικής τροχιάς που περνά από το (x_1, x_2) . Έστω ότι η διεύθυνση αυτή σχηματίζει μια γωνία ϕ με τον x_1 -άξονα.

Ορισμός 9.3. Ο δείκτης $I(C)$ της κλειστής καμπύλης C είναι

$$\frac{\Delta\Phi}{2\pi}, \quad \text{όπου } \Delta\Phi \text{ η συνολική μεταβολή στη γωνία } \Phi, \text{ που σχηματίζει το}$$

$(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ με τον x_1 -άξονα, καθώς το σημείο (x_1, x_2) διατρέχει μια φορά την C κατά την θετική (αντίθετη με την των δεικτών του ρολογιού) έννοια.

Προφανώς ο $I(C)$ είναι ακέραιος. Για να τον προσδιορίσουμε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{f_2}{f_1}$$

και έτσι

$$d\phi = \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

οπότε

$$I(C) = \frac{1}{2\pi} \int_C d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad (9.4)$$

όπου

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2, \quad df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \quad (9.5)$$

Θεώρημα 9.1. Έστω C κλειστή καμπύλη που δεν περιέχει σημεία ισορροπίας ούτε εντός, ούτε επί της C . Τότε $I(C)=0$.

Απόδειξη. Έστω S το χωρίο που περιβάλλεται από την C . Τότε $f_1^2 + f_2^2 \neq 0$ στο S , και από το Θεώρημα του Green και την (9.4) παίρνουμε

$$I(C) = \frac{1}{2}\pi \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial f_1} \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) + \frac{\partial}{\partial f_2} \left(\frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \right\} df_1 df_2$$

Όμως η υπό ολοκλήρωση παράσταση ισούται ταυτοτικά με το μηδέν, απ'όπου έπεται το ζητούμενο. Μπορούμε να παρατηρήσουμε, εξάλλου, ότι

$$df_1 df_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2$$

Πόρισμα 9.1. Έστω C_1 και C_2 κλειστές καμπύλες, που η C_2 περικλείει την C_1 , και S το μεταξύ τους χωρίο. Αν δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εντός του S , τότε

$$I(C_1) = I(C_2)$$

Απόδειξη. Έστω Γ και $-\Gamma$ δύο ευθύγραμμα τμήματα (παράλληλα, με μικρή μεταξύ τους απόσταση) που συνδέουν τη C_1 με τη C_2 . Από το Θεώρημα 9.1 έπεται ότι $I(C)=0$, όπου C η κλειστή καμπύλη που ορίζεται από τη C_1 , τη C_2 το Γ και το $-\Gamma$. Όμως

$$I(C) = I(C_2) + I(-C_1) + I(\Gamma) + I(-\Gamma) = I(C_2) + I(-C_1)$$

και αφού, προφανώς, $I(C_1) = -I(-C_1)$, έπεται το ζητούμενο.

Ορισμός 9.4. Ο δείκτης $I(P)$ ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας P , είναι ο δείκτης $I(C)$ τυχούσας κλειστής καμπύλης C που

περικλείει το P , ενώ δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της.

Θεώρημα 9.2. Ο δείκτης μιας κλειστής καμπύλης C που περιέχει k μεμονωμένα σημεία ισορροπίας P_j , $j=1,2,\dots,k$, στο εσωτερικό της, δίνεται από τη σχέση

$$I(C) = \sum_{j=1}^k I(P_j) \quad (9.6)$$

Απόδειξη. Έστω C_j κλειστή καμπύλη που περιβάλλει το P_j και δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της, $j=1,2,\dots,k$. Τότε $I(P_j) = I(C_j)$ και αναλόγως με την απόδειξη του Πορίσματος

9.1, συμπεραίνουμε ότι $I(C) = \sum_{j=1}^k I(C_j)$, από όπου έπεται η (9.6).

Θεώρημα 9.3. Έστω C η τροχιά μιας περιοδικής λύσης του (9.3). Τότε $I(C)=1$.

Απόδειξη. Αφού η C είναι τροχιά, το πεδίο διευθύνσεων $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ σε τυχόν σημείο (x_1, x_2) επί της C , συμπίπτει με το εφαπτόμενο διάνυσμα στην C . Τότε, προφανώς $\int_C d\phi = 2\pi$, και το

ζητούμενο έπεται από τον Ορισμό 9.3.

Θεώρημα 9.4. (Poincaré). Κάθε κλειστή τροχιά του (9.3), περικλείει ένα τουλάχιστον σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη. Έστω C μια κλειστή τροχιά του (9.3) που δεν περιέχει κανένα σημείο ισορροπίας στο εσωτερικό της. Τότε από το Θεώρημα 9.1, έπεται ότι $I(C)=0$. Η C , όμως, ως κλειστή τροχιά θα έχει $I(C)=1$, από το Θεώρημα 9.3.

Άμεσα έπεται το επόμενο

Πόρισμα 9.2. Έστω C η τροχιά μιας περιοδικής λύσης του (9.3) και έστω ότι όλα τα σημεία ισορροπίας του (9.3) είναι μεμονωμένα. Τότε

το εσωτερικό της C περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων ισορροπίας $P_j, j=1,2,\dots,k$, και

$$I(C) = \sum_{j=1}^k I(P_j) = 1 \quad (9.7)$$

Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι για το σύστημα

$$x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + g_1(x_1, x_2), \quad x_2' = b_1x_1 + b_2x_2 + g_2(x_1, x_2), \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

με

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|g_1|}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|g_2|}{r} = 0, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

ο δείκτης ενός μεμονωμένου σημείου ισορροπίας είναι -1 αν το σημείο είναι σαγματικό, ενώ $+1$, διαφορετικά.

Θεώρημα 9.5. (Το Αρνητικό Κριτήριο του Bendixson). Αν η

παράσταση $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ έχει σταθερό πρόσημο σε κάποιο απλά

συνεκτικό χωρίο του επιπέδου φάσεων, τότε δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές σε αυτό το χωρίο.

Απόδειξη. Έστω ότι το εν λόγω χωρίο περιέχει μια κλειστή τροχιά $C = \{x_1(t), x_2(t)\}$, με εσωτερικό R . Τότε, από την υπόθεση και το Θεώρημα του Green, έχουμε

$$\int_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \iint_R \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \neq 0$$

Όμως, κατά μήκος της C έχουμε $dx_1 = f_1 dt$ και $dx_2 = f_2 dt$, άρα

$$\int_C (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) = \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0, \quad \text{άτοπο}$$

Τα Θεωρήματα 9.4 και 9.5 είναι, βέβαια, χρήσιμα, αλλά αποτελούν αρνητικά κριτήρια. Αυτά που στην πραγματικότητα επιθυμούμε, είναι

θετικά κριτήρια, που να δίνουν ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κλειστών τροχιών του (9.3). Ένα από τα λίγα θεωρήματα αυτού του είδους είναι το κλασικό

Θεώρημα 9.6. (Poincaré-Bendixson). Έστω R κλειστό και φραγμένο χωρίο, τέτοιο, ώστε κάποια θετική ημιτροχιά C του συστήματος $x' = f(x)$ να βρίσκεται ολόκληρη εντός του R . Τότε, είτε η ίδια η C είναι οριακός κύκλος, είτε κινείται σπειροειδώς πλησιάζοντας έναν οριακό κύκλο, ή καταλήγει σε ένα σημείο ισορροπίας.

Δεν δίνουμε εδώ την απόδειξη· μπορεί να βρεθεί στα συγγράμματα [Ha], [Hu] και [Hi-Sma] της βιβλιογραφίας.

Παρατήρηση 9.2. Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα έχει κλειστές τροχιές τότε και μόνον τότε αν οι ρίζες του χαρακτηριστικού του πολωνόμου είναι γνήσιες φανταστικές· τότε όλες οι τροχιές είναι κλειστές. Έτσι, για τα γραμμικά συστήματα, είτε κάθε τροχιά είναι κλειστή ή δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές.

Το Θεώρημα 9.6 έχει τα ακόλουθα, χρήσιμα, πορίσματα.

Πόρισμα 9.3. Αν το χωρίο R είναι ένα κλειστό, φραγμένο και θετικά αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος και αν δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας εντός του R , τότε υπάρχει ένας οριακός κύκλος εντός του R .

Πόρισμα 9.4. Έστω g ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος. Αν δεν υπάρχει ανοιχτό σύνολο επί του οποίου η g να είναι σταθερή, τότε δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι.

Παρατήρηση 9.3. Το Θεώρημα 9.6 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εξής: έστω ότι μπορούμε να βρούμε δύο κλειστές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 , που η Γ_2 να βρίσκεται εντός της Γ_1 , τέτοιες ώστε όλες οι τροχιές που τέμνουν την Γ_1 να κατευθύνονται προς το εσωτερικό της, ενώ όλες οι τροχιές που τέμνουν την Γ_2 να κατευθύνονται έξω από αυτήν. Τότε, καμιά τροχιά που εισέρχεται στο δακτυλιοειδές χωρίο μεταξύ της Γ_1 και Γ_2 , δεν μπορεί ποτέ να διαφύγει από εκεί. Ο "δακτύλιος" R είναι ένα κατάλληλο χωρίο για το θεώρημα. Αν, επιπροσθέτως, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ο R δεν περιέχει σημεία ισορροπίας, τότε το θεώρημα προβλέπει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον κλειστής τροχιάς G , κάπου μέσα στον R . Η G οφείλει να περιβάλλει την εσωτερική καμπύλη (Γ_2), αφού ο δείκτης της είναι 1 και ως εκ τούτου πρέπει να έχει στο εσωτερικό της

κάποιο σημείο ισορροπίας και επειδή ο R δεν περιέχει σημεία ισορροπίας. Για τον ίδιο λόγο, πρέπει να υπάρχουν κατάλληλα σημεία ισορροπίας στο εσωτερικό της Γ_2 .

Το ίδιο αποτέλεσμα αληθεύει αν οι τροχιές που τέμνουν την Γ_1 κατευθύνονται όλες προς το εσωτερικό της, ενώ εκείνες που τέμνουν την Γ_2 , όλες έξω από αυτήν.

Η εύρεση τέτοιων Γ_1 και Γ_2 για ένα συγκεκριμένο σύστημα, είναι συχνά δύσκολη.

Παρατήρηση 9.4. Ο τίτλος αυτής της παραγράφου δικαιολογείται ως εξής:

Μια λύση $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ του συστήματος (9.3) λέγεται **περιοδική**, αν η $x(t)$ δεν είναι σταθερή, ορίζεται για κάθε t και υπάρχει ένας θετικός αριθμός T , τέτοιος ώστε $x_j(t+T) = x_j(t)$, για κάθε T . Ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα λέγεται **περίοδος** της λύσης. Είναι προφανές ότι κάθε περιοδική λύση του (9.3) ορίζει μια κλειστή τροχιά, που διασχίζεται μια φορά, καθώς, για τυχόν t_0 , το t αυξάνει από t_0 ως t_0+T . Αντιστρόφως, εύκολα διαπιστώνεται ότι, αν η $C = \{x_1(t), x_2(t)\}$ είναι μια κλειστή τροχιά του (9.3), τότε η $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ είναι μια περιοδική λύση. Συνεπώς, η αναζήτηση περιοδικών λύσεων του (9.3), ανάγεται στην αναζήτηση κλειστών τροχιών.

Παράδειγμα 9.3. Να δειχθεί ότι το διάγραμμα φάσεων της εξίσωσης

$$x'' - x'(1-3x^2-2(x')^2) + x = 0 \quad (9.8)$$

έχει έναν οριακό κύκλο.

Το αντίστοιχο σύστημα είναι

$$x' = y, \quad y' = -x + y(1-3x^2-2y^2)$$

που σε πολικές συντεταγμένες γράφεται

$$r' = r\mu^2\Theta(1-3r^2\sigma\mu^2\Theta-2r^2\eta\mu^2\Theta),$$

$$\Theta' = -1 + \frac{1}{2} \eta \mu^2 \Theta (1 - 3r^2 \sigma \nu^2 \Theta - 2r^2 \eta \mu^2 \Theta)$$

Η πρώτη από αυτές τις εξισώσεις με $r=1/2$ δίνει

$$r' = \frac{1}{4} \eta \mu^2 \Theta \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \nu^2 \Theta \right) \geq 0$$

όπου το "=" ισχύει μόνο για $\Theta=0$ ή $\Theta=\pi$. Συνεπώς το σύνολο

$$\left\{ (x,y) : r > \frac{1}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο.

Επίσης από την πρώτη των εξισώσεων του συστήματος σε πολική μορφή, παίρνουμε

$$r' \leq r \eta \mu^2 \Theta (1 - 2r^2)$$

Έτσι για $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ισχύει $r' \leq 0$, με ισότητα μόνο για $\Theta=0$ ή

$\Theta=\pi$. Συνεπώς και το σύνολο

$$\left\{ (x,y) : r < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο.

Έτσι, έπεται ότι ο δακτύλιος

$$\left\{ (x,y) : \frac{1}{2} < r < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο και αφού το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το $(x,y) = (0,0)$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας οριακός κύκλος εντός του δακτυλίου.

Παράδειγμα 9.4. Να δειχθεί ότι αν το σύστημα

$$\begin{aligned}x_1' &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \ , \\x_2' &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{9.9}$$

έχει μια κλειστή τροχιά τότε είτε αυτή περιβάλλει την αρχή των αξόνων,

ή τέμνει τον κύκλο $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\begin{aligned}\frac{\partial(-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2))}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + \alpha)}{\partial x_2} &= \\ &= 2(1 - 2(x_1^2 + x_2^2))\end{aligned}\tag{9.10}$$

είναι θετική εντός του κύκλου $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ και αρνητική έξω από αυτόν.

Συνεπώς καμιά κλειστή τροχιά δεν μπορεί να περιέχεται πλήρως στο

απλά συνεκτικό χωρίο $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\}$. Έτσι, αν υπάρχει μια

κλειστή τροχιά, είτε βρίσκεται στο $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$, ή τέμνει τον

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$. Αν η κλειστή τροχιά βρίσκεται στο $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$

θα πρέπει να περιβάλλει το $(0,0)$, διαφορετικά θα περιέχει μια περιοχή όπου η (9.10) θα έχει σταθερή αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα 9.5. Να δειχθεί ότι το σύστημα

$$x_1' = x_2 + x_1 - x_1^3, \quad x_2' = -x_1 + x_2 - x_2^3 \quad (9.11)$$

έχει μια τουλάχιστον κλειστή τροχιά στο επίπεδο φάσεων.

Θέτουμε $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Τότε

$$V'(x_1, x_2) = 2(x_1 x_1' + x_2 x_2') = 2(x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4)$$

Αν $x_1^2 + x_2^2 < 1$, τότε

$$x_1^2 + x_2^2 > (x_1^2 + x_2^2)^2 = x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4 \geq x_1^4 + x_2^4$$

Συνεπώς η $V'(x_1, x_2)$ είναι γνήσια θετική επί του κύκλου $x_1^2 + x_2^2 = \rho$

για κάθε $\rho \in (0, 1)$.

• Εξάλλου, αν $x_1^2 + x_2^2 > 2$, τότε

$$2(x_1^4 + x_2^4) \geq (x_1^2 + x_2^2)^2 > 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Συνεπώς η $V'(x_1, x_2)$ είναι γνήσια αρνητική επί του κύκλου

$x_1^2 + x_2^2 = \rho$ για κάθε $\rho > 2$.

Το σύστημα έχει, λοιπόν, τουλάχιστον μια κλειστή τροχιά που βρίσκεται μεταξύ των δύο ομοκέντρων κύκλων.

Το Θεώρημα Poincaré-Bendixson είναι πολύ ικανοποιητικό από θεωρητική άποψη, αλλά, γενικώς, είναι δύσκολο να χρησιμοποιηθεί. Ένα περισσότερο πρακτικό κριτήριο, εξασφαλίζει την ύπαρξη κλειστών τροχιών για εξισώσεις της μορφής

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (9.12)$$

που λέγεται εξίσωση Lienard (πρβλ. Παράδειγμα 7.5 σελ. 71). Η (9.8) γράφεται

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned} \quad (9.13)$$

όπου

$$F(x) = \int_0^x f(u) du$$

Το θεμελιώδες θεώρημα που αφορά στις κλειστές τροχιές της (9.12) είναι το

Θεώρημα 9.7. (Levinson-Smith). Η (9.12) έχει μια μοναδική περιοδική λύση, αν οι f και g είναι συνεχείς και

(i) η $F(x)$ είναι περιττή συνάρτηση
 (ii) η $F(x)$ είναι ίση με μηδέν μόνο στα σημεία $0, \pm a$, για κάποιο $a > 0$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ με μονότονο τρόπο για $x > a$

(iv) η $g(x)$ είναι περιττή συνάρτηση και ισχύει $g(x) > 0$ για $x > 0$.

Δεν δίνουμε εδώ την απόδειξη· μπορεί να βρεθεί στα [Jor-Sm] και [Si].

Παράδειγμα 9.6. Η εξίσωση Van der Pol

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad \varepsilon > 0 \quad (9.14)$$

έχει έναν μοναδικό οριακό κύκλο.

Πράγματι, για $f(x) = \varepsilon(x^2 - 1)$, $F(x) = \varepsilon x(1/3 x^2 - 1)$, $g(x) = x$ και $a = \sqrt{3}$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 9.7.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ο πρώτος από τους δύο αριθμούς που προτάσσονται κάθε άσκησης αναφέρεται στην αντίστοιχη παράγραφο των σημειώσεων.

2.1. Ναδειχθεί ότι κάθε (μη τετριμμένη) λύση της $x' = x$ είναι μη φραγμένη και ασταθής, ενώ κάθε λύση της $x' = 1$ είναι μη φραγμένη και ευσταθής.

2.2. Λύνοντας τις εξισώσεις

$$x' = -y(x^2 + y^2) \quad , \quad y' = x(x^2 + y^2)$$

δείξτε ότι η μηδενική λύση είναι ευσταθής και όλες οι άλλες ασταθείς.

Αντικαταστήστε τις συντεταγμένες x, y με r, ϕ , αντιστοίχως, όπου

$$x = r \cos(r^2 t + \phi) \quad , \quad y = r \sin(r^2 t + \phi)$$

και δείξτε ότι το σύστημα γράφεται

$$r' = 0 \quad , \quad \phi' = 0$$

Τέλος, δείχνοντας ότι όλες οι λύσεις του τελευταίου συστήματος είναι ευσταθείς, αποδείξτε ότι η αλλαγή συντεταγμένων μπορεί να επιδράσει επί της ευστάθειας ενός συστήματος.

2.3. Να εξετασθεί η ευστάθεια των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων

$$(i) \quad x' = x^2 \quad (ii) \quad x' = 2x - 3x^2$$

3.1. Να εξετασθούν ως προς την ευστάθεια οι λύσεις των:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$$

$$(ii) \quad x'' + e^{-t} x' + x = e^t$$

$$(iii) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \mu t \\ \sigma \nu \nu t \\ \ln(t^2 + 1) \end{bmatrix}$$

$$(iv) x' = \lambda x + \mu y, y' = x + \lambda y$$

$$(v) x' = (\lambda^2 - \mu)x + (1 + \mu)y, y' = -\mu^2 x + \mu^2 y$$

$$(vi) x' = \lambda x - y, y' = \lambda y - z, z' = \lambda z - x$$

} για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

4.1. Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J και ένας πίνακας M με την ιδιότητα $J = M^{-1}AM$ για κάθε έναν από τους ακόλουθους πίνακες A :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -29 \\ 58 & -41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

4.2. Προσδιορίστε τον τύπο και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $(0,0)$ για κάθε ένα από τα ακόλουθα συστήματα:

$$(i) x' = 2x, y' = 3y$$

$$(ii) x' = -x - 2y, y' = 4x - 5y$$

$$(iii) x' = -3x + 4y, y' = -2x + 3y$$

$$(iv) x' = 5x + 2y, y' = -17x - 5y$$

$$(v) x' = -4x - y, y' = x - 2y$$

$$(vi) x' = 4x - 3y, y' = 8x - 6y$$

$$(vii) x' = 4x - 2y, y' = 5x + 2y$$

4.3. Αποδείξτε ότι το επίπεδο φάσεων του συστήματος

$$x' = ax + by, y' = cx + dy, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

με $ad = bc$, είναι ένα από τα:

(i) μια ευθεία σημείων ισορροπίας με ευθειακές τροχιές που είτε την πλησιάζουν, είτε απομακρύνονται από αυτήν,

(ii) μια ευθεία σημείων ισορροπίας με ευθειακές τροχιές παράλληλες προς αυτήν,

(iii) όλο το επίπεδο και αποτελείται από σημεία ισορροπίας.

4.4. Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια αλλαγή μεταβλητών που να μετατρέπει κάθε ένα από τα επόμενα σε ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$(i) x' = x + y + 2, y' = x + 2y + 3$$

$$(ii) x' = 2x - 3y + 1, y' = 6x - 9y$$

$$(iii) x' = 2x + y + 1, y' = x + z, z' = y + z + 2$$

(iv) $x' = x+y+z+1$, $y' = -y$, $z' = x+z+1$

4.5. Έστω $x(t)$ μια τροχιά του γραμμικού συστήματος $x' = Ax$ τέτοια, ώστε $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$. Έστω N ένας μη ιδιάζων πίνακας και

$y = Nx$. Δείξτε ότι η τροχιά $y(t) = Nx(t)$ του συστήματος $y' = NAN^{-1}y$, έχει επίσης την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$. Έτσι, δείξτε ότι αν το $x' = Ax$ έχει

ένα σημείο ισορροπίας που είναι ευσταθής κόμβος, νόθος κόμβος ή εστία, το ίδιο συμβαίνει και για το σύστημα $y' = NAN^{-1}y$.

4.6. Διατυπώστε και αποδείξτε ένα ανάλογο αποτέλεσμα με αυτό της προηγούμενης άσκησης, για την περίπτωση που μια τροχιά $x(t)$ του συστήματος $x' = Ax$, έχει την ιδιότητα $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$. Χρησιμοποιώ-

ντας αυτό και το προηγούμενο συμπέρασμα, δείξτε ότι αν το $x' = Ax$ έχει σαγματικό σημείο στο 0 , τότε το ίδιο ισχύει και για το σύστημα $y' = NAN^{-1}y$.

4.7. Δείξτε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση της οικογένειας καμπυλών $y = c_1 x^{m_1}$ επί της οικογένειας καμπυλών $y = c_2 x^{m_2}$ (c_1, c_2, m_1, m_2 : σταθερές) τότε και μόνον τότε αν $m_1 = m_2$ ή $m_1 = m_2^{-1}$. Έτσι, δείξτε ότι υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση των τροχιών του συστήματος

$$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

επί του διαγράμματος φάσεων του συστήματος

$$x' = \mu_1 x, \quad y' = \mu_2 y$$

τότε και μόνον τότε αν $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ ή $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

4.8. Δείξτε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{R}^+$ τέτοιο, ώστε η συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = \begin{cases} y^k, & y \geq 0 \\ -(-y)^k, & y < 0 \end{cases}$$

απεικονίζει τις τροχιές του κόμβου $x' = \lambda_1 x, y' = \lambda_2 y$ επί των τροχιών του αστεροειδούς κόμβου $x' = \epsilon x, y' = \epsilon y$, $\epsilon = +1$ ή $\epsilon = -1$, διατηρώντας τον προσανατολισμό.

4.9. Δείξτε ότι τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να βρεθεί μια απεικόνιση που απεικονίζει τις τροχιές τυχόντος σαγματικού σημείου επί των τροχιών του σαγματικού σημείου του $x' = x, y' = -y$.

5.1. Κατατάξτε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Γραμμικοποίησης, όπου αυτό είναι δυνατό, τα σημεία ισορροπίας των συστημάτων:

- (i) $x_1' = x^2 - 3x_1 + 2, x_2' = x_1^2 - x_2^2$
- (ii) $x_1' = x_2, x_2' = -x_1 + x_1^3$
- (iii) $x_1' = \eta \mu(x_1 + x_2), x_2' = x_2$
- (iv) $x_1' = x_1 - x_2 - e^{x_1}, x_2' = x_1 - x_2 - 1$
- (v) $x_1' = -x_2 + x_1 + x_1 x_2, x_2' = x_1 - x_2 - x_2^2$
- (vi) $x_1' = x_2, x_2' = -(1 + x^2 + x^4)x_2 - x_1$
- (viii) $x_1' = -3x_2 + x_1 x_2 - 4, x_2' = x_2^2 - x_1^2$

5.2. Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι εστία για το σύστημα

$$x_1' = -x_2 - x_1 \gamma, \quad x_2' = x_1 - x_2 \gamma, \quad \gamma = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

ενώ είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα.

5.3. Μελετήστε τα συστήματα (13.11) και (13.12) της σελ. 158, κατά τρόπο ανάλογο με της μελέτης του συστήματος $\{(13.5), (13.6)\}$ της σελ. 156.

6.1. Δείξτε ότι η αλλαγή συντεταγμένων

$$y_1 = x_1 + x_2^3, \quad y_2 = x_2 + x_2^2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Κιβωτίου Ροής για το σύστημα

$$x_1' = -\frac{3x_2^2}{1+2x_2}, \quad x_2' = \frac{1}{1+2x_2}$$

στην περιοχή οποιουδήποτε σημείου (x_1, x_2) με $x_2 \neq -1/2$.

7.1. Δείξτε ότι η $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$ για κάθε ένα από τα συστήματα:

(i) $x_1' = -x_2 - x_1^3, \quad x_2' = x_1 - x_2^3$

(ii) $x_1' = -x_1^3 - x_2 \eta \mu x_1, \quad x_2' = -x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 \eta \mu x_1$

(iii) $x_1' = -x_1 - 2x_2^2, \quad x_2' = -2x_1 x_2 - x_2^3$

(iv) $x_1' = -x_1 \eta \mu^2 x_1, \quad x_2' = -x_2 - x_2^5$

(v) $x_1' = -(1-x_2)x_1, \quad x_2' = -(1-x_1)x_2$

Στη συνέχεια βρείτε πεδία έλξης στο $(0,0)$ για τα συστήματα αυτά.

7.2. Δείξτε ότι η $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ είναι ασθενής συνάρτηση Lyapunov στο $(0,0)$ για κάθε ένα από τα συστήματα:

(i) $x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - x_2^3(1-x_1^2)^2$

(ii) $x_1' = -x_1 + x_2^2, \quad x_2' = -x_1 x_2 - x_1^2$

(iii) $x_1' = -x_1^3, \quad x_2' = -x_1^2 x_2$

(iv) $x_1' = -x_1 + 2x_1 x_2^2, \quad x_2' = -x_1^2 x_2^3$

Ποιό από αυτά τα συστήματα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές;

7.3. Αν V είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα $x' = -f(x)$ σε μια περιοχή του $\mathbf{0}$, δείξτε ότι το σύστημα $x' = f(x)$ έχει ένα

ασταθές σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{0}$. Δείξτε, στη συνέχεια, ότι τα συστήματα

$$(i) \quad x_1' = x_1^3, \quad x_2' = x_2^3$$

$$(ii) \quad x_1' = \eta \mu x_1, \quad x_2' = \eta \mu x_2$$

$$(iii) \quad x_1' = -x_1^3 + 2x_1^2 \eta \mu x_1, \quad x_2' = x_2 \eta \mu^2 x_2$$

είναι ασταθή στο $(0,0)$.

7.4. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.1, δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - x_2 - (x_1 + 2x_2)(x_2^2 - 1)$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές στο $(0,0)$, θεωρώντας την περιοχή $|x_2| < 1$. Στη συνέχεια βρείτε ένα πεδίο έλξης.

7.5. Με τη χρήση της συνάρτησης

$$V(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{b} \right)^2$$

δείξτε ότι το σύστημα

$$x_1' = x_1(x_1 - a), \quad x_2' = x_2(x_2 - b), \quad a, b > 0$$

έχει το $(0,0)$ ως ασυμπτωτικά ευσταθές. Δείξτε, επιπλέον, ότι όλες οι τροχιές τείνουν στο $(0,0)$ καθώς $t \rightarrow \infty$, στην περιοχή

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$$

7.6. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3$$

δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι ασταθές για το σύστημα

$$x_1' = x_2^2 - x_1^2, \quad x_2' = 2x_1x_2$$

7.7. Βρείτε πεδία έλξης για τα επόμενα συστήματα, χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις Lyapunov:

$$(i) \quad x_1' = x_2 - x_1g(x_1, x_2), \quad x_2' = -x_1 - x_2g(x_1, x_2),$$

$$g(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)(1 + x_1^2 + x_2^2)$$

$$(ii) \quad x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_2 + x_2^3 - x_1^5$$

7.8. Δείξτε ότι αν το σύστημα

$$x' = f(x,y), \quad y' = g(x,y)$$

έχει σημείο ισορροπίας στο $(0,0)$, τότε η μηδενική λύση είναι ασταθής αν υπάρχουν σταθερές α και β , τέτοιες ώστε σε μια περιοχή του $(0,0)$ που δεν περιέχει το $(0,0)$, να ισχύει

$$\alpha f(x,y) + \beta g(x,y) > 0$$

7.9. Θεωρούμε το σύστημα

$$x' = -\alpha x + \beta f(y), \quad y' = \gamma x - \delta f(y), \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$$

με $\beta\gamma - \alpha\delta > 0$ και $f(0) = 0$, $yf(y) > 0$ ($y \neq 0$). Δείξτε ότι για κατάλληλες τιμές των A, B η

$$V = \frac{1}{2} Ax^2 + B \int_0^y f(u) du$$

είναι ισχυρή συνάρτηση Lyaroupon για τις μηδενικές λύσεις.

7.10. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(x,y) = (\delta x - \beta y)^2 + 2\delta \int_0^x f(u)du - \beta\gamma x^2$$

είναι μια ισχυρή συνάρτηση Lyaroupon για τη μηδενική λύση του συστήματος

$$x' = f(x) + \beta y, y' = \gamma x + \delta y, f(0) = 0$$

όταν σε μια περιοχή του $(0,0)$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\delta \frac{f(x)}{x} - \beta\gamma > 0, \quad \frac{f(x)}{x} + \delta < 0 \quad (x \neq 0)$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι για αρχικές συνθήκες εντός του κύκλου $x^2 + y^2 < 1$, οι λύσεις του συστήματος

$$x' = -x^3 + x^4 + y, y' = -x$$

τείνουν στο $(0,0)$.

7.11. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 7.5, σελ. 77, για να δείξετε ότι για $a > 0$, κάθε λύση του συστήματος

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 - ax_2$$

τείνει στο $(0,0)$ καθώς $t \rightarrow +\infty$.

8.1. Να βρεθούν πρώτα ολοκληρώματα και τα πεδία ορισμού τους, για τα ακόλουθα συστήματα:

(i) $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1^2 + 1$

(ii) $x_1' = x_1(x_2 + 1), \quad x_2' = -x_2(x_1 + 1)$

$$(iii) \quad x_1' = \tau \epsilon \mu x_1, \quad x_2' = -x_2^2, \quad |x_1| < \frac{\pi}{2}$$

$$(iv) \quad x_1' = x_1(x_1 e^{x_2} - \text{συν} x_2), \quad x_2' = \eta \mu x_2 - 2x_1 e^{x_2}$$

8.2. Να βρεθεί ένα πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος

$$x_1' = x_1 x_2 - 3x_1^3, \quad x_2' = -6x_1^2 x_2 + x_1^4 + x_2^2$$

με τη χρήση της αντικατάστασης $x_2 = u x_1^2$. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα φάσεων.

8.3. Να βρεθούν πρώτα ολοκληρώματα για τα γραμμικά συστήματα $x' = Jx$, όπου $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ο πίνακας Jordan για κόμβο, κέντρο και εστία, αντιστοίχως. Να βρεθούν μέγιστες περιοχές ύπαρξης αυτών των πρώτων ολοκληρωμάτων. Είναι δυνατό να είναι συντηρητικό ένα σύστημα που έχει ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας;

9.1. Να βρεθούν κλειστές τροχιές των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων:

$$(i) \quad x'' + (2(x')^2 + x^4 - 1)x' + x^3 = 0$$

$$(ii) \quad x'' + ((x')^2 + x^2 - 4)x = 0$$

$$(iii) \quad x'' + (2(x')^2 + x^4 - 1)x^3 = 0$$

9.2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x^3 = 0$$

έχει μια ακριβώς περιοδική λύση.

9.3. Να δειχθεί ότι η εξίσωση

$$x'' + (|x| + |x'| - 1)x' + x|x| = 0$$

έχει μια τουλάχιστον περιοδική λύση.

9.4. Να δειχθεί ότι η αρχή των αξόνων είναι κέντρο για την εξίσωση

$$x'' + (kx' + 1)\eta\mu x = 0$$

9.5. Να δειχθεί ότι υπάρχει μια περιοχή $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 + x_2 \leq r^2\}$ τέτοια, ώστε όλες οι τροχιές του συστήματος

$$x_1' = -\sigma x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x_2' = \sigma x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - \omega$$

όπου σ, ω : σταθερές, εισέρχονται τελικώς εντός της R . Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει έναν οριακό κύκλο όταν $\omega = 0$.

9.6. Να αποδειχθεί ότι το σύστημα

$$x_1' = 1 - x_1 x_2, \quad x_2' = x_1$$

δεν έχει οριακούς κύκλους.

9.7. Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = -\sigma x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = \sigma x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2) - \omega$$

όπου σ, ω : σταθερές: Να δειχθεί ότι το σύστημα έχει έναν οριακό κύκλο τέτοιο, ώστε όλα τα σημεία του να βρίσκονται σε απόσταση μεγαλύτερη από $\sqrt{2}/2$ από το $(0,0)$, τότε ο οριακός κύκλος περιβάλλει το $(0,0)$.

9.8. Θεωρούμε το σύστημα

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2)$$

και υποθέτουμε ότι το σύνολο $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο και ότι

$$\begin{aligned} x_1' &\geq 0 & \text{όταν} & & x_2 &\leq -x_1^2 + 3x_1 + 1 \\ x_2' &\geq 0 & \text{όταν} & & x_2 &\leq x_1 \end{aligned}, \text{ αντιστοίχως}$$

Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι δεν υπάρχουν κλειστές τροχιές μέσα στο R , ναδειχθεί ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας εντός του R είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.