Συνέχεια Απόδειξης:
Έστω $f \in I(V(J))$, το θδο $f^m \in J$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.
Έχουμε ότι $k[x_0, x_1, \dots, x_n] \supseteq \tilde{J} = \langle 1 - x_0 f, \ h \in J \rangle$
Ισχύει ότι $V(\tilde{J}) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, a_0, \dots, a_n \in V(\tilde{J}) \Rightarrow (a_1, \dots, a_n) \in V(J)$
$\Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) = 0 \Rightarrow 1 - a_0 f(a_1, \dots, a_n) = 0, \ i \in J$
και τότε $0 = 1 - a_0 f(a_1, \dots, a_n) = 1$ άτοπο. Δηλ $V(\tilde{J}) = \emptyset$.
Από το Nullstellensatz έχουμε $1 \in \tilde{J}$, δηλ

$$1 = g_0(x_0, \dots, x_n)(1 - x_0 f(x_1, \dots, x_n)) + \sum_{j=1}^{s} g_j(x_0, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n)$$

για $x_0 = 1/f$ παίρνουμε

$$1 = g_0\left(\tfrac{1}{f}, x_1, \dots, x_n\right)\left(1 - \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f}\right) + \sum_{j=1}^{s} g_j\left(\tfrac{1}{f}, \dots, x_n\right) f_j(x_1, \dots, x_n)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα με δύναμη του f έχουμε

$$f^N = \sum_{j=1}^{e} g_j'(x_1, \dots, x_n) f_j(x_1, \dots, x_n).$$

δηλ. το ζητούμενο. ∎

Εφαρμογή: Έστω $V, W \subseteq \mathbb{A}^n_k$ ω $V \supsetneq W$, τότε $I(V) \subseteq I(W)$.
Αν $V(J_1) = V$ και $V(J_2) = W$, τότε $\sqrt{J_1} \subsetneq \sqrt{J_2}$

↳ Πράγματι, $V(J_1) \supsetneq V(J_2) \Rightarrow I(V(J_1)) \subseteq I(V(J_2))$
$\Rightarrow \sqrt{J_1} \subseteq \sqrt{J_2}$

Πρόταση: Αν $V(I) \notin \{\emptyset, \mathbb{A}^n_k\}$, τότε το $V(I)^c$ δεν είναι αλγεβρικό.
Απόδειξη:
Έστω ότι το $V(I)^c$ αλγεβρικό, δηλ $\exists J \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$ ω

$$V(I)^c = V(J)$$

Τότε $V(I) \cup V(J) = \mathbb{A}^n_k \Rightarrow V(I \cap J) = \mathbb{A}^n_k \ \to V(0)$
$\Rightarrow I(V(I \cap J)) = I(\mathbb{A}^n_k)$
$\Rightarrow \sqrt{I \cap J} = \langle 0 \rangle \Rightarrow I \cap J = \langle 0 \rangle$
Αν $I, J \neq \langle 0 \rangle$, τότε $\exists\, \underbrace{f \in I, g \in J}_{\text{μη μηδενικά}}$ ω $I \cap J \ni fg = 0$ άτοπο
Άρα, $I = \langle 0 \rangle$ ή $J = \langle 0 \rangle$. ∎

Τοπολογια Zariski

Θεωρουμε ανοιχτά σύνολα τα

$$\mathcal{T} = \{ V(I)^c \mid I \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n] \}$$ → δηλ τα κλειστά σύνολα είναι τα αλγεβρικά

(*) Τα αλγεβρικά σύνολα μπορεί κανεις να τα θεωρησει μικρα σύνολα μέτρου μηδεν κι έτσι τα ανοιχτά σύνολα της τοπολογίας Zariski έχει μεγάλα ανοιχτά σύνολα, οπότε δεν ισχύουν θεωρηματα όπως το Θ. Αντίστροφης Απεικονισης.

Πρόταση. Το παραπανω σύνολο είναι τοπολογία, δηλ

1. $\phi, \mathbb{A}^n_k \in \mathcal{T}$
2. Αν $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$, τότε $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
3. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ για κάθε οικογένεια στοιχειων $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ του $\mathcal{T}$.

Απόδειξη

1. Έχουμε ήδη επιχειρηματολογησει
2. Έστω $O_1 = V(I_1)^c$, $O_2 = V(I_2)^c$, τότε
$$O_1 \cap O_2 = V(I_1)^c \cap V(I_2)^c = (V(I_1) \cup V(I_2))^c = V(I_1 \cap I_2)^c \in \mathcal{T}$$
3. Ομοίως έχουμε ότι
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)^c = \Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)\Big)^c = V(\textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)^c \in \mathcal{T} \quad \blacksquare$$

Γιατί ορίσαμε αυτή την τοπολογία

Αν θεωρησουμε τις συναρτησεις evaluation

$$ev_f : \mathbb{A}^n_k \longrightarrow k$$
$$P \longmapsto f(P)$$

τότε θέλουμε $f^{-1}(0) = V(f)$ κλειστό σύνολο

Υποθέτουμε τα πολυώνυμα συνεχή και καταλήγουμε στην τοπολογία Zariski

Ακόμη για $I \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$, τότε

$$V(I) = V(f_1, \dots, f_s) = \bigcap_{i=1} V(f_i)$$ → κλειστό

→ **Στην Γ.Α.** : Το σύνολο των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων είναι πυκνό στον $M_n(\mathbb{R})$ ή $M_n(\mathbb{C})$

Το σύνολο των διαγωνοποιήσιμων $n \times n$ πινάκων είναι πυκνό στον $M_n(\mathbb{C})$.

πολυώνυμο

Η τοπολογία Zariski μας δίνει ότι $GL_n(k) = \det^{-1}(\{0\}^c)$ πυκνό υποσύνολο του $M_n(k)$.

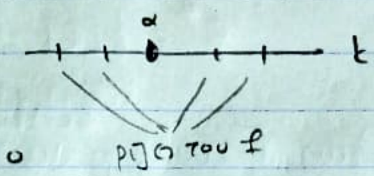
⚠ <u>Προσοχή</u>: 1) Η τοπολογία Zariski <u>δεν</u> είναι Hausdorff.

Ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $\alpha \in \mathbb{A}^1_k$, τότε

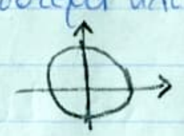
$\alpha \in V(f)^c$ με $f(\alpha) \neq 0$

και $b \in V(g)^c$ με $g(\beta) \neq 0$

Όμως $V(f)^c \cap V(g)^c \neq \phi$ (τα σύνολα είναι όλος ο χώρο έξω κάποια πεπερασμένα σημεία άρα θα τέμνονται)



2) Η τοπολογία Zariski στο $\mathbb{A}_k^2$ <u>δεν</u> είναι η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$, καθώς υπάρχουν περισσότερα κλειστά από τα πεπερασμένα σημεία. (π.χ. $V(x^2+y^2-1)$ ⟶

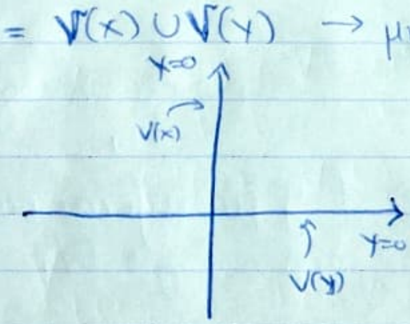


↳ αυτά μας δίνει η τοπολ. γινόμενο.

$S \times \mathbb{A}^1$ ή $\mathbb{A}^1 \times S$ ή $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$

Ορσ: Ένα αλγεβρικό σύνολο V λέγεται <u>ανάγωγο</u> (irreducible) αν $\nexists$ V_1, V_2 κλειστά με $V_1 \neq \phi \neq V_2$ με $V = V_1 \cup V_2$

<u>Π.χ.</u> $V(xy) = V(x) \cup V(y)$ → μη ανάγωγο



Πρόταση: Ένα αλγεβρικό σύνολο V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $I(V)$ πρώτο ιδεώδες.

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $V = V(J) = V(J_1) \cup V(J_2)$ με $V(J_i) \subsetneq V(J) \Rightarrow \sqrt{J} \subsetneq \sqrt{J_i}$

άρα $\exists$ $f_1 \in \sqrt{J_1}$ και $f_2 \in \sqrt{J_2}$ τω $f_1, f_2 \notin \sqrt{J}$

Όμως το $f_1 f_2$ μηδενίζεται στο $V \Rightarrow f_1 f_2 \in I(V)$ με $f_1, f_2 \notin I(V)$ άτοπο

<u>TIP</u>: Σε κάθε ορισμό, είναι καλό να ξέρω 1 αντικείμενο που πληροί τις προϋποθέσεις
+ 1 αντικείμενο που δεν πληροί καμία προϋπόθεση

($\Rightarrow$) Έστω V ανάγωγο, και θεωρούμε $f_1 f_2 \in I(V)$ τω $f_1, f_2 \notin I(V)$.
Θέτουμε $J_1 = \langle I(V), f_1 \rangle$ και $J_2 = \langle I(V), f_2 \rangle$, τότε $J_1, J_2 \supsetneq I(V)$.
Άρα, $V(J_1) \subseteq V(I(V))$
$V(J_2) \subseteq V(I(V))$

Έστω $p \in V$, τότε $f_1(p) f_2(p) = 0 \rightarrow f_1(p)$ ή $f_2(p) = 0$
$\Rightarrow p \in V(J_1)$ ή $p \in V(J_2)$
$\Rightarrow p \in V(J_1) \cup V(J_2) \overset{?}{=} V$

Όμως V ανάγωγο και άρα έχουμε άτοπο. ■

Ορ: Έστω V ένα αλγεβρικό σύνολο στο $\mathbb{A}^n_k$. Ορίζουμε τον <u>δακτύλιο συντεταγμένων</u> στο V ως

$$k[V] = k[x_1, \dots, x_n] / I(V)$$

Πόρισμα: V ανάγωγο $\Leftrightarrow$ $k[V]$ ακέραια περιοχή.

<u>Ιδέα</u>: Θέλω να μελετήσω τις συναρτήσεις $V \to k$ για να το κατανοήσω γεωμετρικά. Ξέρω τις συναρτήσεις $\mathbb{A}^n_k \to k$ (τα πολυώνυμα) και άρα

Τοπολ. Zariski

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_k \arrow[d, dotted, "\cdot|_V"'] \arrow[dr, "{k[x_1,\dots,x_n]}"] & \\ V \arrow[r] & k \end{tikzcd}$$

επαγόμενη τοπολ

παίρνω περιορ. πολυωνύμων $f|_V$

Εδώ θα ταυτίζω $f|_V = g|_V \Leftrightarrow f-g$ μηδενίζεται στο V
δηλ $f-g \in I(V)$

<u>ΜΟΡΦΙΣΜΟΙ</u>:

<u>Ορ</u>: Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^m_k$ και $W \subseteq \mathbb{A}^n_k$. Μία συνάρτηση $\Phi: V \to W$ θα ονομάζεται <u>μορφισμός αλγεβρικών συνόλων</u>, αν $\exists f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_m]$ τω
$\forall p = (a_1, \dots, a_m)$ $\Phi(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$.

! Τα πολυώνυμα $f_1, \dots, f_n$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα.

πχ) Θεωρούμε το $C = V(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ και ορίζουμε

$$\varphi : \mathbb{A}^1_k = k \longrightarrow C : a \longmapsto (a^2, a^3).$$

Παρατηρούμε ότι $\forall a \in k$ $(a^2, a^3) \in C$ $[(a^3)^2 - (a^2)^3 = 0]$
και ορίζεται και μία συνάρτηση στους δακτυλίους συντεταγμένων

$$\phi^\# : k[C] \longrightarrow k[\mathbb{A}^1_k] = k[t]$$
$$f(x,y) + (y^2 - x^3) \longmapsto f(t^2, t^3).$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f\circ\phi \in k[V]"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & k \end{tikzcd}$$

$\Big\}$ $k[W]$ όλες αυτές οι συναρτήσεις

Κατασκευή του Pullback

Ορ: Η απεικόνιση $\phi : V \to W$ είναι <u>μορφισμός</u> αν η επαγόμενη συνάρτηση (pullback) $\phi^\# : k[W] \to k[V]$ είναι ομομορφ. δακτυλίων.

Μάθημα 4º 09/10

Previously: μία απεικόνιση $\phi: V \to W$ είναι μορφισμός ανν
$$\phi^{\#}: k[W] \to k[V]$$
το αντίστοιχο pullback = ομομορφισμός δακτυλίων.

(*) Θέλαμε ο φισμός να είναι ανεξάρτητος από τα πολυώνυμα που τον υλοποιούν, δηλ γνωρίζοντας το $\phi^{\#}$ μπορούμε να πάρουμε το ϕ.

↳ Θεωρούμε τα $k[V], k[W]$ πεπερ. παραγ. k-άλγεβρες και γράφουμε
$$\phi^{\#}: \underset{k[y_1,\dots,y_m]/I_W}{\overset{\shortparallel}{k[W]}} \longrightarrow \underset{k[x_1,\dots,x_n]/I_V}{\overset{\shortparallel}{k[V]}}$$

και τότε
$$y_1 + I_W \longmapsto f_1(x_1,\dots,x_n) + I_V$$
$$\vdots$$
$$y_m + I_W \longmapsto f_m(x_1,\dots,x_n) + I_V$$
↳ όχι μοναδικός αντιπρόσωπος

Ορίζουμε τότε μορφισμό $\phi: V \longrightarrow W$
$$P = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto (f_1(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\dots,f_m(\alpha_1,\dots,\alpha_n)).$$
Αν επιλέξουμε $f_1'(x_1,\dots,x_n)$ στο y_1, τότε θα έχουμε ότι
$$f_i - f_i' \in I_V \Rightarrow f_i(p) - f_i'(p) = 0 \quad \forall p \in V$$
$$\Rightarrow f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = f_i'(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

Μεγιστικά Ιδεώδη του $k[V]$.

Θα δούμε ότι ο δακτύλιος $k[V]$ γνωρίζει τα σημεία.
Από τη μια αν $P = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in V$, τότε $\langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle \trianglelefteq k[x_1,\dots,x_n]$ μεγιστικό και άρα η προβολή $\pi: k[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I(V)} = k[V]$ θα δίνει μεγιστικό ιδεώδες
$$\bar{m} = \langle \bar{x}_1 - \alpha_1, \dots, \bar{x}_n - \alpha_n \rangle.$$
Αντίστροφα, δδο αν $m \trianglelefteq k[V]$ μεγιστικό, τότε $\pi^{-1}(m)$ μεγιστικό

Λήμμα: Έστω $\phi: R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων και $p \trianglelefteq S$ πρώτο, τότε $\phi^{-1}(p) \trianglelefteq R$ πρώτο.

Απόδειξη:

Θεωρούμε την σύνθεση $R \xrightarrow{\phi} S \xrightarrow{\pi} S/p$ που έχει πυρήνα

$$\ker(\pi\circ\phi) = \phi^{-1}(p) \text{ ιδεώδες (εύκολο check)}$$

και άρα παίρνουμε μονομορφισμό $\overline{\pi\circ\phi}: R/\phi^{-1}(p) \to S/p$, δηλ. έχουμε εμφύτευση $R/\phi^{-1}(p) \hookrightarrow S/p$

Άρα ο $R/\phi^{-1}(p)$ είναι ισόμορφος με υποδακτύλιο ακ. περιοχής και επομένως $R/\phi^{-1}(p)$ ακ. περιοχή $\Rightarrow \phi^{-1}(p)$: πρώτο. ■

⚠ Προσοχή: Ενώ έχουμε αντιστοιχία στα πρώτα ιδεώδη, αυτό δεν ισχύει και για τα μεγιστικά.

πχ/ $\phi: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

$\langle 0\rangle$ μεγιστικό

όμως $\phi^{-1}(\langle 0\rangle) = \langle 0\rangle$ πρώτο, αλλά όχι μεγιστικό

Στόχος: Αν έχουμε μία πεπερ. παραγ. k-άλγεβρα χωρίς μηδενοδύναμα (π.χ. $k(V)$) θέλουμε να ταυτίσουμε τα σημεία μιας πολλαπλότητας με το

$$\operatorname{Spm} k[V] = \{m \trianglelefteq k(V) \mid m \text{ μεγιστικό}\}$$

το μεγιστικό φάσμα.

πχ/ Στο $k[\mathbb{A}^n_k] = k[x_1, \dots, x_n]$ αυτό φαίνεται τετριμμένο.

Λήμμα (από Nullstellensatz): Έστω R ακ. περιοχή πεπερ. παραγ/k. Αν R σώμα, τότε κάθε στοιχείο του R είναι αλγεβρικό στο k.

Λήμμα: (1) Έστω A ακ. περιοχή και $\forall a \in A$, a αλγεβρικό στο k, τότε A σώμα

(2) Αν A ακ. περιοχή και $\operatorname{Quot}(A)$ το σώμα πηλίκων της και το $\operatorname{Quot}(A)$ περιέχεται σε affine k-άλγεβρα, τότε κάθε $a \in A$ είναι αλγεβρικό στο k

ένας τρόπος να το δει κανείς είναι να ορίσει $ev_\alpha : k[x] \longrightarrow k$, $f(x) \longmapsto f(\alpha)$

τότε $I = \ker ev_\alpha$

→ ev_α 1-1 $\Leftrightarrow \ker ev_\alpha = \{0\} \Leftrightarrow$ α υπερβατικό.

→ άρα αν ev_α όχι 1-1 δηλ $\exists \ker ev_\alpha$ τότε α αλγεβρικό

$\ker ev_\alpha = \{f \in k[x] \mid f(\alpha) = 0\}$

Απόδειξη

(1) Έστω $\alpha \in A$ αλγεβρικό στο k και $I = \{f \in k[x] \mid f(\alpha) = 0\} \neq \emptyset$.

Θεωρούμε $I = \langle f \rangle$ το ελάχιστο πολυώνυμο του α, τότε

$$\therefore \quad k[\alpha] = k[x]/\langle f \rangle \subseteq A.$$

Το f είναι ανάγωγο (αν δεν ήταν θα είχαμε πολυώνυμο μικρότερου βαθμού που μηδενίζει το α) και άρα πρώτο και μεγιστικό.

$$\langle f \rangle = I(\{\alpha\}) \text{ με } \{\alpha\} \subset \mathbb{A}^1_k$$

Αν $\deg f = 1$, τότε $\alpha \in k$ και προφανώς αντιστρέφεται.

Αν $\deg f > 1$, τότε στο σώμα $k[\alpha] \cong k[x]/\langle f \rangle$ έπεται ότι

$$\exists g \in k[x] : g \cdot x = 1 \mod \langle f \rangle$$

και τότε το $g(\alpha)$ είναι αντίστροφο του α.

(2) Προκύπτει από το λήμμα του Nullstellensatz

Πρόταση: Έστω $\varphi : k[V] \to k[W]$ ομομορφ. δακτυλίων και $k[V]$ ακ. περιοχή, τότε $m \trianglelefteq k[W]$ μεγιστικό $\Rightarrow \varphi^{-1}(m) \trianglelefteq k[V]$ μεγιστικό.

Απόδειξη:

Θεωρούμε όπως πριν την απεικόνιση

$$R = k[V]/\varphi^{-1}(m) \longrightarrow k[W]/m$$

Συνεπώς κάθε στοιχείο του R είναι αλγεβρικό υπερ του k και R ακ. περ. (καθώς m: μεγιστικό άρα πρώτο $\Rightarrow \varphi^{-1}(m)$ πρώτο.) που περιέχεται σε σώμα $k[W]/m$. Άρα, R σώμα και $\varphi^{-1}(m)$ μεγιστικό από λήμμα (2). ∎

Πρόταση: Έστω k αλγ. κλειστό σώμα και V αλγ. σύνολο, τότε $\exists$ 1-1 αντιστοιχεία των σημείων του V με το σύνολο $\mathrm{Spm}(k[V])$

$$V \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longleftrightarrow \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle.$$

$(V, k[V])$ αφινική αλγ. πολλαπλότητα

$(V,k[V]) \xrightarrow{(\phi,\phi^\#)} (W,k[W])$ με $\phi: V\to W$ και $\phi^\#: k[W]\to k[V]$

τω αν $a\in V$ και $b=\phi(a)\in W$ $\longrightarrow$ $(\phi^\#)^{-1}(m_a)=m_b$

m_a m_b μεγιστικά

Στόχος:

(1) Θέλουμε να γενικεύσουμε την κατασκευή από τις ακέραιες περιοχές $k[V]$ σε τυχαίο μεταθετικό δακτύλιο R. Για το σκοπό αυτό θα αντικαταστήσουμε το $\mathrm{Spm}\, R$ με $\mathrm{Spec}\, R$ (καθώς δεν ξέρουμε αν η τυχαία αντίστροφη εικόνα είναι μεγιστική)

$$\phi: R\to S$$
$$\phi^\#: \mathrm{Spec}\, S \to \mathrm{Spec}\, R$$
$$p \longmapsto \phi^{-1}(p)$$

Αυτό μας επιτρέπει να μελετήσουμε περισσότερες περιπτώσεις, καθώς πέρα από τα ιδεώδη $\langle x-1, y-2\rangle$, σημεία φαίνονται και τα $\langle x^2+y^2-1\rangle$

(2) Έχουμε $k[V]=\frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I(V)}$ $I(V)$ reduced, διότι $\sqrt{I(V)}=I(V)$

διότι μιλώντας για κλασσικά varieties ο παρονομαστής είναι reduced

↓

όμως μπορεί να μην είναι ακ. περιοχή (πχ V οχι ανάγωγο)

πχ • $\mathbb{Z}[x,y,z]/\langle x^2+y^2-z^2\rangle$ → Πυθαγόρειες τριάδες

μελετάω διοφαντικά προβλήματα

• x^2-t → πολυώνυμα στο $k[x,t]$

ή πολυώνυμα που παραμετρούνται από το t

↳ η αντίστροφη σε μας δίνει κάτι non-reduced

$k[x,t]/\langle x^2-t\rangle \longrightarrow k[t]$

(3) Καθώς προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε τα εργαλεία του Απειροστικού με εργαλεία μεταθετικής άλγεβρας στις παραπάνω κατασκευές, μπορούμε να ορίσουμε ~~τοπ~~ έννοια του απειροστού μέσω δακτυλίων

πχ $k[x]/\langle x^2\rangle$ $x\neq 0$ όμως $x^2=0$ έχει non reduced στοιχεία

↳ δακτύλιος απειροστών

λειτουργεί όπως η αριθμητική κινητής υποδιαστολής με την ελάχιστη τιμή $\varepsilon_{min}=10^{-100}$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_{min}^2=0$.

Ορσ: Έστω R πεπερασμένα παραγόμενη k-άλγεβρα, τότε το ζευγάρι $(\mathrm{Spm}\, R, R)$ ονομάζεται γενικευμένη αλγεβρική πολλαπλότητα.