Ορσ: Ένας <u>ομομορφισμός μεταξύ γενικευμένων αφινικών πολλαπλοτήτων</u> είναι ένα ζευγάρι (ϕ^a, ϕ) με $\phi : S \longrightarrow R$ και η επαγόμενη απεικόνιση $\phi^a : \mathrm{Spm}R \to \mathrm{Spm}S : m \longmapsto \phi^{-1}(m)$
Ο δακτύλιος R είναι ο <u>δακτύλιος των κανονικών συναρτήσεων</u> του $\mathrm{Spm}R$

(*) Ο όρος κανονικές συναρτήσεις δικαιολογείται, καθώς $\forall r \in R$ ορίζεται συνάρτηση

$$\mathrm{Spm}R \longrightarrow k$$
$$m \longmapsto R/m = k$$

Αφού για κάθε $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ και $m = \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n \rangle$, η προβολή του f στο $k[x_1, \dots, x_n]/m$ είναι η τιμή $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Πχ) Έστω $R = k[x]/\langle x^n \rangle$, τότε παίρνουμε τον δακτύλιο n-τάξης απειροστών παραμορφώσεων

$$\left(\mathrm{Spm}\, k[x]/\langle x^n \rangle, \; k[x]/\langle x^n \rangle\right)$$

Παρατηρούμε $\mathrm{Spm}R = \{\langle x \rangle / \langle x^n \rangle\}$, αφού υπάρχει μοναδικό μέγιστο ιδεώδες. Για κάθε n έχουμε γεν-αφ πολλαπλότητες με 1 σημείο, ωστόσο η καθεμία είναι διαφορετική!!

Τοπικοποίηση / Localisation

Ας δούμε αρχικά το παράδειγμα κατασκευής του δακτυλίου πηλίκων των ρητών.
Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ και τη σχέση

$$(a,b) \sim (c,d) \iff ad - cb = 0$$

Αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας
- αυτοπαθής: $(a,b) \sim (a,b) \iff ab - ab = 0$ ✓
- συμμετρική: $(a,b) \sim (c,d) \iff ad - cb = 0 \iff cb - ad = 0 \iff (c,d) \sim (a,b)$
- μεταβατική: $(a,b) \sim (c,d) \iff ad - bc = 0$
  $(c,d) \sim (e,f) \iff cf - ed = 0$

Έχουμε $(af - be)d = afd - bed = afd - cbf + cbf - bed$
$= f(ad - cb) + b(cf - ed) = 0$
$\iff af - be = 0$ καθώς $d \in \mathbb{Z}^\times \iff (a,b) \sim (e,f)$.

Ορ: Έστω R δακτύλιος και $S \subseteq R$. Το S ονομάζεται <u>πολλ/στικό</u> αν $\forall a,b \in S \quad ab \in S$.

Ορ: Έστω R δακτύλιος και $S \subseteq R$ πολλ/στικό με $1 \in S$. Θεωρούμε το σύνολο $R \times S$ και τη σχέση ισοδυναμίας (Άσκηση)

$$(\alpha,\tau) \sim (b,\sigma) \Leftrightarrow (\alpha\sigma - \tau b)\cdot u = 0 \quad \text{για κάποιο } u \in S.$$

Το σύνολο πηλίκων αυτής της σχέσης είναι δακτύλιος που ονομάζεται <u>Εντοπισμός (localisation)</u> του R στο S και συμβ $S^{-1}R$.

→ Θα συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $(\alpha,\tau) \in S^{-1}R$ ως $\frac{\alpha}{\tau}$ και ο δακτύλιος R προβάλλεται στο $S^{-1}R$ γράφοντας

$$\alpha = \frac{\alpha}{1} \in S^{-1}R \quad \forall \alpha \in R$$

δηλ έχουμε εμφύτευση $f: R \longrightarrow S^{-1}R$

<u>Καθολική Ιδιότητα</u>

Έστω R, R' δακτύλιοι και $g: R \to R'$ με $\forall s \in S \subseteq R$ πολλ/στικό: $g(s) \in U(R')$, τότε $\exists! h: S^{-1}R \to R'$ που κάνει το διπλανό διάγραμμα μεταθετικό, δηλ

$$h \circ f = g.$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & R' \\ S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Πχ</u> ① <u>$S^{-1}A = 0 \Leftrightarrow 0 \in S$</u>

$\frac{a}{\sigma}, \frac{b}{\tau} \in S^{-1}A \Leftrightarrow (a\tau - b\sigma)\cdot 0 = 0$ δηλ ικανοποιείται $\forall a,b \in R \ \forall \tau,\sigma \in S$ και άρα έχω μία κλάση ισοδυναμίας (το 0)

② Έστω $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ για κάποιο $f \in R$, τότε συμβολίζουμε $S^{-1}R = R_f$

③ Έστω $p \trianglelefteq R$ πρώτο, τότε μπορώ να επιλέξω $S = R - p$ πολλ/στικό και σε αυτή την περίπτωση συμβ: $S^{-1}R = R_p$

<u>Παρατήρηση</u>: $\{\frac{a}{s} \in A_p \mid a \in p \text{ και } s \in S\} = m \trianglelefteq A_p$ μέγιστο.

$$\frac{b}{t} \notin m \Leftrightarrow b \notin p \Rightarrow \frac{b}{t} \in U(A_p).$$

(σαν του A_p)

Ορσ: Ένας δακτύλιος με μοναδικό μέγιστο ιδεώδες ονομάζεται τοπικός (local)

(*) Η διαίσθηση από παραπάνω ορισμό είναι ότι καθώς $\mathrm{Spm}R = \{m\}$ κοιτάω "τοπικά" ένα σημείο

Ασκ 1.5 (σελ 16): Έστω R αντιμεταθετικός με μονάδα

(α) Αν $I \trianglelefteq R$, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$\{\bar{J} \trianglelefteq R/I\} \longleftrightarrow \{I \subseteq J \trianglelefteq R\}$$

Θεωρούμε την προβολή $\pi: R \to R/I$ και θα πάρουμε: $\phi^{-1}(\bar{J}) = J$ ιδεώδες που περιέχει το I $(\phi(I)=0)$

Αντίστροφα αν $J \trianglelefteq R$ και $I \subseteq J$, τότε $\phi(J) = \bar{J} \trianglelefteq R/I$

(β) ορσ του localization

(γ) Νδο τα $\bar{p} \trianglelefteq S^{-1}R$ πρώτα αντιστοιχούνται αμφιμονοσήμαντα στα πρώτα ιδεώδη $p \trianglelefteq R$ με $p \cap S = \emptyset$.

Έστω $\bar{p} \trianglelefteq S^{-1}R$ πρώτο τότε $f^{-1}(\bar{p}) \trianglelefteq R$ πρώτο μέσω της $f: R \to S^{-1}R$ (προφ: $f^{-1}(\bar{p}) \cap S = \emptyset$).

Αντίστροφα, αν $p \trianglelefteq R$ πρώτο τω $p \cap S = \emptyset$ Νδο $f(p)S^{-1}R$ πρώτο.

Ορίζω $\phi: S^{-1}R \to (\bar{S})^{-1} R/p$, όπου $\bar{S} = \pi(S) R/p$

ακ nεp $\overset{\|}{\text{το}}$ 0

η ϕ είναι <u>επί</u>: προφανές

<u>$\ker\phi$</u>: $\phi(\frac{a}{s}) = 0 \underset{u \in S}{\iff} \frac{a}{s} \cdot u \equiv 0 \bmod p$ με $u \in S$

$\iff a \equiv 0 \bmod p$

$\iff a \in p$

Άρα, $\ker\phi = f(p) S^{-1}R \Rightarrow S^{-1}R / f(p)S^{-1}R \cong *$

→ ακ nεp $f(p)$ πρώτο

→ 0 $p \cap S \neq \emptyset$

Τοπολογία Zariski σε Γενικευμένες Αφινικές Πολλαπλότητες

Έστω $(\mathrm{Spm}R, R)$ μια γεν αφινική πολλαπλότητα, $f \in R$ και ορίζουμε το σύνολο

$$D(f) = \{m \in \mathrm{Spm}R \mid f \notin m\}$$ → βάση ανοικτών της τοπολογίας Zariski του SpmR

Δηλ. κάθε ανοιχτό U στην τοπολογία Zariski γράφεται ως

$$U = \bigcup_{f \in a} D(f)$$

Ορίζουμε αντίστοιχα

$$V(f) = D(f)^c = \{ m \in \operatorname{Spm} R \mid f \in m \}$$ βάση για τα κλειστά

πχ! Έστω R δακτύλιος και $f \in R$ μη μηδενοδύναμο, τότε αν $\langle 1-ft \rangle \trianglelefteq R[t]$ και $S^{-1}R = R[\frac{1}{f}] = R[t]/\langle 1-ft \rangle$ δηλ. παίρνουμε localization

πχ! Μπορεί κανείς να δει την $GL_n(k)$ ως variety

$$k[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, \det(x_{ij})^{-1}]$$

Γενικευμένη Αφινική Πολλαπλότητα $(\mathrm{Spm}R, R) \longrightarrow R$ πεπερ πορος k-άλγεβρα
$$= k[x_1,\dots,x_n]/I \to \text{οχι απαραίτητα ριζικό}$$

(*) Το σύνολο $(\mathrm{Spm}R, R)$ περιέχει περισσότερη πληροφορία από το $V(I)$
$(V(I) = V(\sqrt{I})$ χάνω την πληροφορία των ριζικών$)$

→ Αν $f \in R$ και $m \in \mathrm{Spm}R$, τότε έχει νόημα να μιλήσουμε για το
$$f(m) := f \bmod m$$
πχ/ αν $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = \pi(x)(x-\alpha) + u$, $u \in \mathbb{R}$
και τότε $f(\alpha) = u \equiv f \bmod \langle x-\alpha \rangle$.

(*) ΣΤΑ SCHEMES θα δούμε κάτι αντίστοιχο: $(\mathrm{Spec}R, R)$ → τα πρώτα ιδεώδη του R
πχ/ $(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ πως μπορώ να δω το σημείο 10 σαν συνάρτηση
$$f(\langle p \rangle) = 10 \bmod p$$

Τοπολογία Γενικευμένης Αφινικής Πολλαπλότητας
$V(f) = \{m \in \mathrm{Spm}R \mid f \in m\}$ $\quad R = k[x_1,\dots,x_n]$, $m = \langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$
↳ κλειστό $\longrightarrow$ $f \bmod m = f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$
$D(f) = \{m \in \mathrm{Spm}R \mid f \notin m\}$ $\quad V(f) \supseteq V(m)$
↳ ανοικτό $\quad I(V(f)) \subseteq I(V(m)) = \sqrt{m} = m$
↳ ορίζουν την τοπολογία Zariski του $(\mathrm{Spm}R, R)$

Έστω $I \trianglelefteq R$, τότε $D(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$ και $V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$

πχ/ (1) Βασική Κατασκευή
Έστω $f \in R$ όχι μηδενοδύναμο (δηλ $f^n \neq 0$ $\forall n$) και το ιδεώδες
$\langle 1 - ft \rangle \trianglelefteq R[t]$. Θεωρούμε τον δακτύλιο
πεπερ πορος k-άλγεβρα $\quad S = R[\frac{1}{f}] = R[t]/\langle 1-ft \rangle$

εμφανίζεται μηδενοδύναμο
Εν γένει θα έχουμε $\sqrt{I} \supsetneq I$, δηλ $\exists f \in \sqrt{I} \setminus I$ και άρα $(f+I)^n = f^n + I$
$$\begin{array}{cc} f \notin I & f^n \in I \\ \Downarrow & \Downarrow \\ f+I \neq 0 & f^n + I = 0 \end{array}$$

Ποια είναι η σχέση των $\mathrm{Spm}R$ και $\mathrm{Spm}S$?
Γράφουμε $R = k[x_1, \dots, x_n]/J$ και $\phi: k[x_1, \dots, x_n, t] \longrightarrow S = \frac{k[x_1,\dots,x_n,t]}{\langle J, 1-ft\rangle}$
Έστω $m \trianglelefteq S$ μέγιστο με $\phi^{-1}(m) = \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n, t - b\rangle$, τότε $m = \phi(\phi^{-1}(m))$ το ιδεώδες το έχουμε και δω είναι μεγιστικό
Θέτουμε $m' = \langle x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n\rangle \trianglelefteq k[x_1, \dots, x_n]$ μέγιστο
Έχουμε

$$1 - f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)b \equiv 0 \bmod m'$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)b \equiv 1 \bmod m'$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \not\equiv 0 \bmod m'$$
$$\Leftrightarrow f \notin m'$$

Άρα
$D(f) \underset{\text{επι}}{\xleftrightarrow{1-1}} \mathrm{Spm}S$

αντίστροφο
Καθώς $R/m' = k$ σώμα και $f \notin m'$ $\exists!\, b$ τω $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)b \equiv 1 \bmod m$
Δηλ $\phi(m') \trianglelefteq S$ μέγιστο.

2) Θεωρούμε την γενικευμένη αφινική πολλαπλότητα $Gl_n(k)$.
Αυτή έχει δακτύλιο συντεταγμένων $S = k[x_{ij}, \det(x_{ij})^{-1}]$ που μπορεί να ειδωθεί ως εντοπιότητα

$$S = \{\det(x_{ij})^n \mid n \in \mathbb{N}\}^{-1} k[x_{ij}]$$

Και έχουμε $\mathrm{Spm}S \longleftrightarrow D(\det(x_{ij})) = V(\det(x_{ij}))$

<u>Μία τοπολογική κατασκευή</u>:
Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $U_X \subseteq X$, $U_Y \subseteq Y$ ανοιχτά και

$$\phi: U_X \longrightarrow U_Y \text{ ομοιομορφισμός}$$

Κολλάμε τους X και Y μέσω του ομοιομορφισμού ϕ ως εξής

ξένη ένωση $\underbrace{X \sqcup Y/_\sim}_{\text{τοπ χώρος πηλίκο}}$ όπου $x \sim y \Leftrightarrow y = \phi(x)$

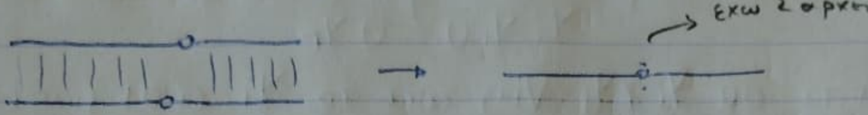
πχ | Θεωρούμε τους χώρους $X = (\mathbb{A}^1_k, k[x])$ και $Y = (\mathbb{A}^1_k, k[y])$ και τα ανοιχτά $U_1 = (D(x), k[x, \frac{1}{x}]) \subseteq X$ και $U_2 = (D(y), k[y, \frac{1}{y}]) \subseteq Y$.
Τότε $\exists$ δύο ομοιομορφισμοί

$$\phi: k[x, \tfrac{1}{x}] \longrightarrow k[y, \tfrac{1}{y}] \qquad x \longmapsto y$$
$$x \longmapsto \tfrac{1}{y}$$

μάλιστα είναι και μορφισμοί varieties

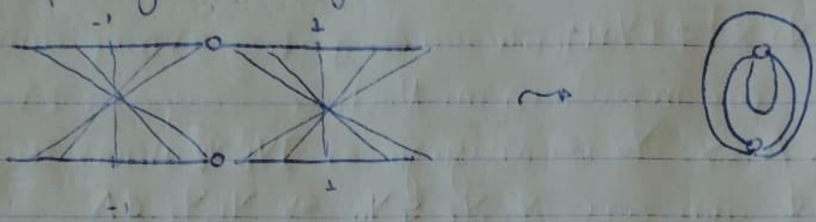
1ο: η πρώτη "συγκόλληση" μας δίνει την προβολική ευθεία $\mathbb{P}^1_k$

Σχηματικά: $D(x) = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$, $D(y) = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$



κολλάω τα σημεία εκτός από το 0

2ο: η δεύτερη "συγκόλληση" γίνεται χιαστί



Πρόταση: Έστω $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$, τότε $V(I(Y)) = \overline{Y}$ (η κλειστότητα στην τοπολογία του Zariski)

Απόδειξη:

Από τη μία έχουμε ότι $Y \subseteq V(I(Y))$ που είναι κλειστό, άρα

$$\overline{Y} \subseteq V(I(Y))$$

Από την άλλη, αν W κλειστό τω $Y \subseteq W$, τότε γράφουμε $W = V(J)$ και έχουμε

$$J \subseteq \sqrt{J} = I(V(J)) = I(W) \subseteq I(Y) \Rightarrow V(I(Y)) \subseteq V(J)$$

$$\Rightarrow V(I(Y)) \subseteq W \quad \forall W \text{ κλειστό}$$

$$\Rightarrow V(I(Y)) \subseteq \overline{Y}.$$ ∎

Ορ: Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται Noether αν ικανοποιεί τη φθίνουσα συνθήκη αλυσίδας για κλειστά σύνολα, δηλ αν Y_i κλειστά τω

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots \supseteq Y_n \supseteq \dots$$

τότε $\exists r \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq r$ $Y_n = Y_r$.

πχ 1. Ο $\mathbb{R}^k$ δεν είναι Noether : $Y_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^k$

2. Ο $\mathbb{A}^n_k$ είναι Noether, καθώς για Y_i κλειστά τω

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots \Rightarrow I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_3) \subseteq \dots$$

$$\xRightarrow{k[x_1,\dots,x_n] \text{ Noether}} \exists r \in \mathbb{N} \text{ τω } \forall n \geq r \quad I(Y_n) = I(Y_r)$$

$$\Rightarrow Y_n = V(I(Y_n)) = V(I(Y_r)) = Y_r$$

Πρόταση: Έστω X τοπολ χώρος Noether, τότε κάθε $\emptyset \neq Y \subseteq X$ κλειστό γράφεται ως πεπερ ένωση αναγώγων κλειστών συνόλων

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$$

Μάλιστα, αν $Y_i \not\subseteq Y_j$ $\forall i \neq j$ τότε τα Y_i είναι μοναδικά ορισμένα.
Ονομάζουμε τα Y_i ανάγωγες συνιστώσες του Y

Απόδειξη:
Έστω $\mathcal{A} = \{Y \subseteq X \mid \emptyset \neq Y$ κλειστό και δεν γράφεται ως πεπερ ένωση αναγώγων$\}$
Αν $\mathcal{A} \neq \emptyset$, τότε από τη συνθήκη της Noether θεωρούμε ελαχιστικό στοιχείο $Y_0 \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow$ Y_0 όχι ανάγωγο $\Rightarrow \exists Y_1, Y_2$ κλειστά τω $Y_0 = Y_1 \cup Y_2$ με $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$ και τότε $Y_1, Y_2 \subsetneq Y_0 \Rightarrow Y_1, Y_2 \notin \mathcal{A}$.
Άρα υπάρχουν ανάγωγα $Y_i', \bar{Y}_j$ τω

$$Y_1 = Y_1' \cup \dots \cup Y_r'$$
$$Y_2 = \bar{Y}_1 \cup \dots \cup \bar{Y}_s$$

Άρα, $Y = Y_1' \cup \dots \cup Y_r' \cup \bar{Y}_1 \cup \dots \cup \bar{Y}_s$ άτοπο.

Μοναδικότητα:
Έστω $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r = \bar{Y}_1 \cup \dots \cup \bar{Y}_s$ δύο γραφές, τότε

$$Y_1 \subseteq Y \Rightarrow Y_1 = (Y_1 \cap \bar{Y}_1) \cup \dots \cup (Y_1 \cap \bar{Y}_s)$$

Όμως Y_1 ανάγωγο και $Y_1 \cap \bar{Y}_i$ κλειστά, άρα

$$\exists!\ \bar{Y}_i \text{ τω } Y_1 \cap \bar{Y}_1 \neq \emptyset$$

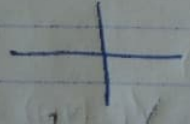
Χωρίς βλάβη της γενικότητας $Y_1 \cap \bar{Y}_1 \neq \emptyset \Rightarrow Y_1 \subseteq \bar{Y}_1$.
Όμοια βρίσκουμε ότι $\exists!\ j \in [r]$ τω $\bar{Y}_1 \subseteq Y_j$. Καθώς $Y_i \not\subseteq Y_j$ $\forall i \neq j$ έχουμε αναγκαστικά $j = 1$ και άρα

$$Y_1 = \bar{Y}_1$$

Θέτουμε $W = \overline{Y - Y_1} = Y_2 \cup \dots \cup Y_r = \bar{Y}_2 \cup \dots \cup \bar{Y}_s$ και συνεχίζουμε επαγωγικά. ∎

αλγεβρικό
Πόρισμα: Κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{A}^n$ γράφεται μοναδικά ως πεπερασμένη ένωση κλειστών αναγώγων.
αλγεβρικών

$V(XY)$



$V(XY(x^2+y^2-1))$

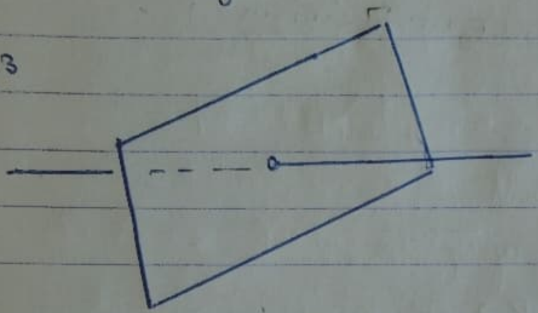
δεν έχω άπειρες παραγοντοποιήσεις γιατί δεν θα είχα πολυώνυμο.

Ορσ: Έστω X τοπολογικός χώρος, ορίζουμε την <u>διάσταση</u> του X να είναι

$$\dim X = \sup_{m\in\mathbb{N}} \{\exists \text{ αλυσίδα } Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n \text{ αναγωγων κλειστων}\}$$

→ Η διάσταση ενός αλγεβρικού συνόλου ορίζεται ως η διάσταση του ως τοπολ. χώρου με την τοπολογία Zariski.

Στον $\mathbb{R}^3$



εκει διάσταση 2

πχ 1. $\dim \mathbb{A}^1_k = 1$, καθώς τα μόνα ανάγωγα κλειστά είναι ο χώρος και τα σημεία

2. $\dim \mathbb{A}^n_k \geq n$, καθώς έχουμε σημείο.

$$\mathbb{A}^n_k \supsetneq \langle x_1\rangle \supsetneq \langle x_1, x_2\rangle \supsetneq \dots \supsetneq \langle x_1, \dots, x_n\rangle$$

<u>Next Up</u>: Η διάσταση Krull των δακτυλίων

θα δούμε ότι $\dim k[x_1,\dots,x_n] = \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot}(k[x_1,\dots,x_n])) = n$

Προτεινόμενο Βιβλίο Μεταθετικής → του D. Eisenbud