ΜΑΘΗΜΑ 7° 21/10

Ορσ: Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και $p \trianglelefteq R$ πρώτο. Ονομάζουμε ύψος (height) του p το supremum των $n \in \mathbb{N}$ τω υπάρχει γν. αύξουσα ακολ. ιδεωδών

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n = p$$

Ορσ: Η διάσταση Krull ενός δακτυλίου R είναι το supremum των height(p) για $p \trianglelefteq R$ πρώτο.

Π. Παρατήρηση: αν Z κλειστό + ανάγωγο, τότε $Z = V(I)$ με I πρώτο και έχουμε το ανάλογο

Πρόταση: Αν Y κλειστό αφινικό σύνολο, τότε η διάσταση του Y ως τοπολ. χώρο με την τοπολογία Zariski είναι ίση με την διάσταση Krull του $k[Y]$.

↦ όχι απαραίτητο αλγ. κλειστό

Θεώρημα: Έστω k σώμα και B ακ. περιοχή που είναι πεπερ. παράγ. k άλγεβρα, τότε:

(1) $\dim(B) = \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot} B)$ χρειάζεται κανονικοποίηση Noether

(2) Για κάθε $p \trianglelefteq B$ πρώτο έχουμε ότι

$$\operatorname{height}(p) + \dim B/p = \dim B$$

Ας το δούμε λίγο διαισθητικά:

- V δχ, τότε $\dim V$ = το μέγιστο # γρ. ανεξ. διανυσμάτων στο V
- $\operatorname{trdeg}_k(K)$ = το μέγιστο # αλγεβρικά ανεξάρτητων στοιχείων /k.

K σώμα
|
k

Έστω $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$, θεωρούμε την

$$\varphi_a : k[x_1, \dots, x_n] \to k : f(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$$

1 στοιχείο ονομάζεται αλγεβρικά ανεξάρτητο αν δεν είναι αλγεβρικό, δηλ ∄ πολυώνυμο $f(x)$ τω $f(a)=0$, άρα στην ουσία υπερβατικό

Αν έχω μια n-άδα $a = (a_1, \dots, a_n)$ αυτά θα λέγονται αλγεβρικά ανεξάρτητα αν η φ_a είναι 1-1, δηλ $\ker \varphi_a = \{0\}$.

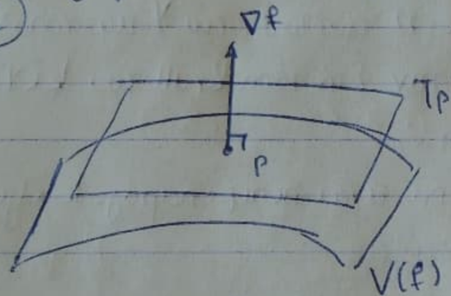
Για το (2) του θεωρήματος:

$$\underbrace{\text{height}(p)}_{\substack{\text{μέγιστη αλυσίδα} \\ \text{που περιέχεται στο } p}} + \underbrace{\dim(B/p)}_{\substack{\text{μέγιστη αλυσίδα} \\ \text{που περιέχει το } p}} = \underbrace{\dim B}_{\substack{\text{μέγιστη αλυσίδα} \\ \text{στο } B}}$$

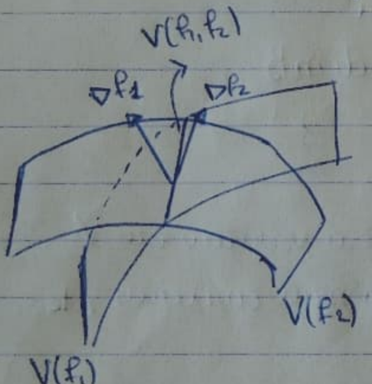
Πρόταση*: Έστω Y ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο στον $\mathbb{A}^n_k$, τότε
$\dim Y = n-1 \iff Y = V(f)$ για κάποιο μη σταθερό f.

! Το παραπάνω μας λέει ότι οι υπερεπιφάνειες είναι ακριβώς οι πολλαπλότητες διάστασης $n-1$
↳ σύνολο μηδενισμού ενός μοναδικού πολυωνύμου

(*) Σύγκριση με διαφορική γεωμετρία:

① 

Η διαφ. γεωμ. μου λέει ότι
$\nabla f(p) \neq 0 \Rightarrow \dim = n-1$
όμως δουλεύει σε περιπτώσεις χωρίς singularities.
Αν έχω singularities κάνω Αλγ. Γεωμετρία.

② 

Αν $\nabla f_1, \nabla f_2$ γρ. ανεξ. έχω εγκάρσια τομή και ξέρω ότι
$\dim V(f_1,f_2) = n-2$
Όμως δεν ισχύει ότι τα σύνολα διάστασης $n-2$ είναι ακριβώς τα $V(f_1,f_2)$

Πρόταση: (1) Έστω A δακτύλιος της Noether και $f \in A$ όχι μονάδα και όχι μηδενοδύναμη, τότε κάθε minimal prime $f \in p \trianglelefteq R$ έχει ύψος 1.
(2) Κάθε ακέραια περιοχή A της Noether έχει μοναδική παραγοντοποίηση αν κάθε πρώτο ιδεώδες ύψους 1 είναι κύριο.

↳ Αποτελέσματα Μεταθετικής Άλγεβρας

Απόδειξη*:

$V(f)$ ανάγωγο $\Rightarrow \langle f \rangle$ πρώτο ιδεώδες ύψος 1

$\Rightarrow \underbrace{\text{height}(p)}_{1} + \dim V(f) = n$ άρα $\dim V(f) = n-1$

$\Rightarrow$ π.c

Αντίστροφα, αν $V(p)$ συνδιάσταση 1 έχουμε $V(p) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ Noether ΤΜΠ και άρα $V(p) = \langle f \rangle$ κύριο. ■

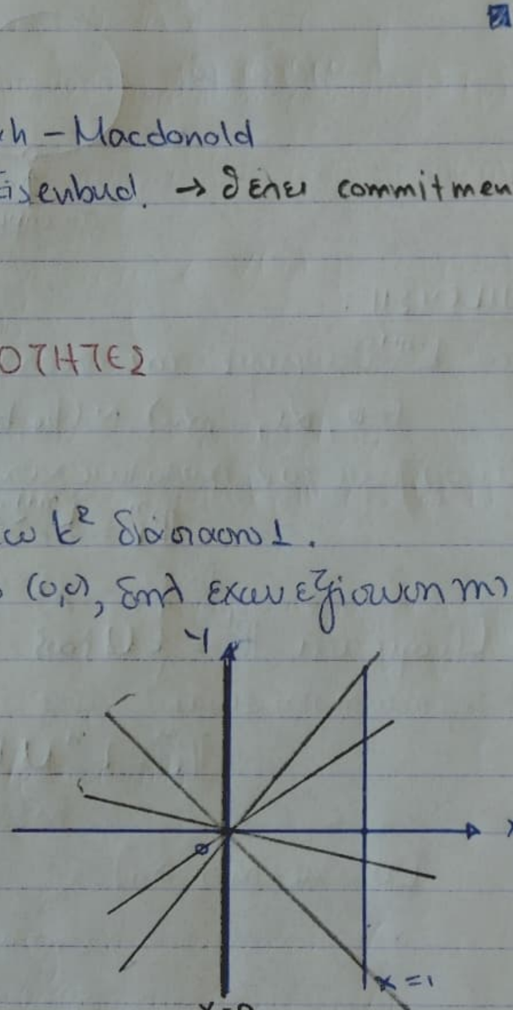
Προτεινόμενη Βιβλιογραφία ΜΑ: 1) Atiyah – Macdonald
2) D. Eisenbud → θέλει commitment

$\boxed{\text{Κεφ 2}}$: Προβολικές Πολλαπλότητες

Προβολική Γεωμετρία:

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των υποχώρων του k^2 διάστασης 1.
Αυτοί θα είναι ευθείες που διέρχονται από το $(0,0)$, δηλ. έχουν εξίσωση της μορφής $y = \lambda x$.

Αν σταθεροποιήσω την ευθεία $x=1$, βλέπω ότι αυτές οι ευθείες αφήνουν πάνω της ίχνος λ.
Εκτός από την $x=0$ που είναι παράλληλη στην $x=1$ και άρα της αντιστοιχούμε το ∞.



Έτσι, ο χώρος των υποχώρων διάστασης 1 αντιστοιχίζεται σε ένα σύνολο της μορφής $k \sqcup \{\infty\}$.
Επειδή δεν μας αρέσει το ∞, επιλέγουμε μία άλλη ισοδύναμη αντιστοιχία

$$\alpha x + \beta y = 0 \longleftrightarrow (\alpha, \beta).$$

Και παρατηρούμε ότι οι $\alpha x + \beta y = 0$ και $\lambda \alpha x + \lambda \beta y = 0$ παριστάνουν την ίδια ευθεία. Άρα, στα ζεύγη (α,β) ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας

$$(\alpha,\beta) \sim (\alpha',\beta') \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ τω } \begin{cases} \alpha = \lambda \alpha' \\ \beta = \lambda \beta' \end{cases}$$

και θεωρούμε την <u>προβολική ευθεία</u> ως το σύνολο πηλίκο $\mathbb{P}^1_k = k^2 \setminus \{(0,0)\} / \sim$

προβολικές
συντεταγμένες

Συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας των (α,β) με $[\alpha:\beta]$
Αν $\beta\neq 0$ συνηθίζουμε να γράφουμε $[\alpha:\beta]=[\frac{\alpha}{\beta}:1]$.
Αν $\beta=0$ τότε έχουμε $[\alpha:0]=[1:0]$ → αντιστοιχεί στην $x=0$
το σημείο στο ∞

→ Σε πολλά μοντέλα η προβολική ευθεία παριστάνεται ως κύκλος

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

Στο k^{n+1} θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας
$$(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)\sim(b_0,b_1,\dots,b_n) \iff \exists\lambda\neq 0 : a_i=\lambda b_i \ \forall i$$
και ορίζουμε τον προβολικό χώρο διάστασης n ως το σύνολο πηλίκο
$$\mathbb{P}^n_k = k^{n+1}\setminus\{(0,\dots,0)\}/\sim .$$

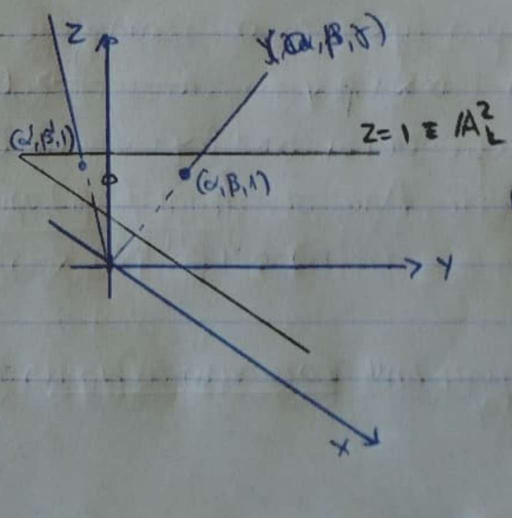
$[\alpha:1]$ $\quad$ $[\alpha:0]=[1:0]$

→ Είδαμε ότι $\mathbb{P}^1_k = k\sqcup\{\infty\}$ και θέλουμε να δούμε το αντίστοιχο στη γενική περίπτωση που είναι
$$\mathbb{P}^n_k = k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}_k$$

$$[a_0:\alpha_1:\alpha_{n-1}:\alpha_n] \begin{cases} \xrightarrow{\alpha_n\neq 0} [\alpha_0/\alpha_n:\dots:\alpha_{n-1}/\alpha_n:1]\equiv \mathbb{A}^n_k \\ \xrightarrow{\alpha_n=0} [\alpha_0:\dots:\alpha_{n-1}:0]\equiv\mathbb{P}^{n-1}_k \end{cases}$$

δηλ $\mathbb{P}^2_k = k^2\sqcup\mathbb{P}^1_k = k^2\sqcup k\sqcup\{\infty\}$

→ Αναπαράσταση του $\mathbb{P}^2_k$
κατόπιν 2-διάστατων
υπόχωρων του $\mathbb{R}^3$



μένει το επίπεδο
xy που είναι η
ευθεία στο άπειρο
$\mathbb{P}^1_k$.

παίρνουμε πολλές ευθείες και
τέμνουμε με επίπεδο

Γενίκευση = GRASSMANNIANS
G_{nk} = k-διάστατοι υπόχωροι
n-δx.

Αλγεβρικά Σύνολα στο $\mathbb{P}^n_k$:

Καθώς δουλεύουμε σε κλάση ισοδυναμίας θέλουμε η ιδιότητα που ορίζουμε να είναι ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων, δηλ αν $f\in k[x_0,x_1,\dots,x_n]$

$$f([\alpha_0:\alpha_1:\dots:\alpha_n]) = f(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$
$$\|$$
$$f([\lambda\alpha_0:\lambda\alpha_1:\dots:\lambda\alpha_n]) = f(\lambda\alpha_0,\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_n) \quad \forall\lambda.$$

Το παραπάνω δεν ισχύει ποτέ, οπότε δεν έχει νόημα να ορίσουμε συναρτήσεις στο $\mathbb{P}^n_k$, όμως αν περιοριστώ στα ομογενή πολυώνυμα μπορώ να ελέγξω πότε μηδενίζονται.

Ορ: Ένα $f\in k[x_1,\dots,x_n]$ ονομάζεται ομογενές (→ βαθμού d) αν είναι της μορφής
$$f(x_0,\dots,x_n)=\sum_{i_0+\dots+i_n=d} a_{i_0,\dots,i_n}\, x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}$$

Ιδιότητα Αναγωγών: $f(\lambda\alpha_0,\dots,\lambda\alpha_n)=\lambda^d f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$

Πάλι, εν γένει έχω $f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\neq f(\lambda\alpha_0,\dots,\lambda\alpha_n)$, όμως ισχύει ότι
$$f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=0 \iff f(\lambda\alpha_0,\dots,\lambda\alpha_n)=0.$$

Δηλ ένα ομογενές πολυώνυμο ορίζει μία συνάρτηση
$$f:\mathbb{P}^n_k \longrightarrow \mathbb{P}^0_k=\{0,1\}$$
$$[\alpha_0:\dots:\alpha_n]\longmapsto 0 \quad \text{αν } f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=0$$
$$[\alpha_0:\dots:\alpha_n]\longmapsto 1 \quad \text{αν } f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\neq 0$$

Ορ: Ένα ιδεώδες του $k[x_0,x_1,\dots,x_n]$ θα λέγεται ομογενές αν παράγεται από ομογενή πολυώνυμα

Ορ: Έστω $f_i\in k[x_0,\dots,x_n]$ ομογενή, τότε ορίζουμε το προβολικό αλγεβρικό σύνολο του $I=\langle f_1,\dots,f_r\rangle$ ως
$$V(I)=V(f_1,\dots,f_r)=\{P\in\mathbb{P}^n_k \mid f(P)=0 \ \forall f\in I\}$$

Προσοχή: Έστω $g\in k[x_0,\dots,x_n]$, τότε μπορούμε να γράψουμε
$$g=\sum_{\delta=0}^{k} g_\delta \quad \text{με } g_\delta \text{ ομογενή βαθμού } \delta$$
$$I\ni gf_i=\Big(\sum_{\delta=0}^{k} g_\delta\Big)\cdot f_i=\sum_{\delta=0}^{k}\underbrace{(g_\delta f_i)}_{\in I}=\sum_{\delta=\deg f_i}^{k+\deg f_i} a_\delta$$

δηλ το τυχαίο στοιχείο δεν είναι ομογενές, αλλά άθροισμα ομογενών

Πρόταση: Έστω $I \trianglelefteq k[x_0,\dots,x_n]$, τότε

I ομογενές $\iff \forall f \in I$ το f διασπάται σε άθροισμα ομογενών που ανήκουν στο I

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) το δείξαμε

($\Leftarrow$) Έστω I με την ζητούμενη ιδιότητα. Καθώς τα πολυώνυμα είναι δακτύλιος Noether έχουμε ότι $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle$. Γράφουμε

$$f_i = \sum_{k=1}^{m_i} \underbrace{f_{i,k}}_{\text{ομογενή}}$$

και τότε προφανώς $I \supseteq \langle f_{i,k}\rangle \supseteq \langle f_1,\dots,f_r\rangle = I$. ■

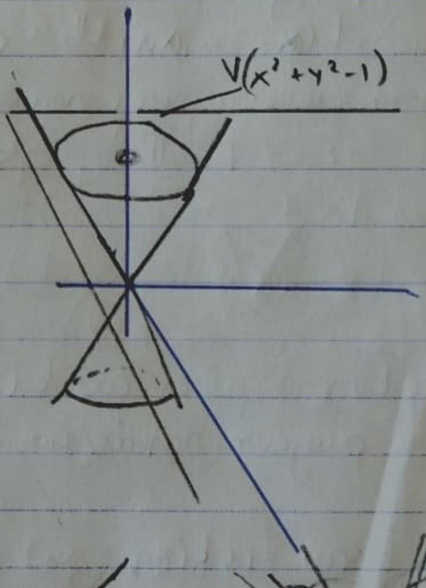
(*) Το I (ομογενές) είναι ένα S-module ($S = k[x_0,\dots,x_n]$) συμπεριφερόμενο ως είναι ένας βαθμωτός δακτύλιος και το $I = \bigoplus_{d=1}^{\infty} I_d$ graded S module   ίσως τα δούμε πιο μετά

Ας δούμε τώρα τι μορφή έχουν αυτά τα αλγεβρικά σύνολα

Το $V(x^2+y^2-1)$ στο $\mathbb{A}^2_k$ είναι κύκλος

Αν το περάσω στο $\mathbb{P}^2_k$ τι θα είναι?

Αρχικά, θα δούμε πώς βάζω ένα αφινικό σύνολο στον προβολικό χώρο (ομογενοποίηση):



$$\mathbb{A}^2_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$$
$$(\alpha,\beta) \longmapsto [\alpha:\beta:1]$$

όμοια

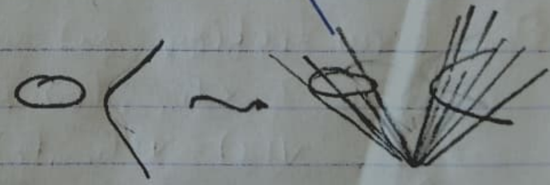
$$f(x,y) \longmapsto z^{\deg f} f\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$$

ή πιο απλά συμπληρώνω z για να κάνω ομογενές

$$x^2+y^2-1 \rightsquigarrow x^2+y^2-z^2$$

ΚΥΚΛΟΣ   ΚΩΝΟΣ

$$y^2-(x^3+\alpha x+b) \rightsquigarrow y^2z-(x^3+\alpha xz^2+bz^3)$$



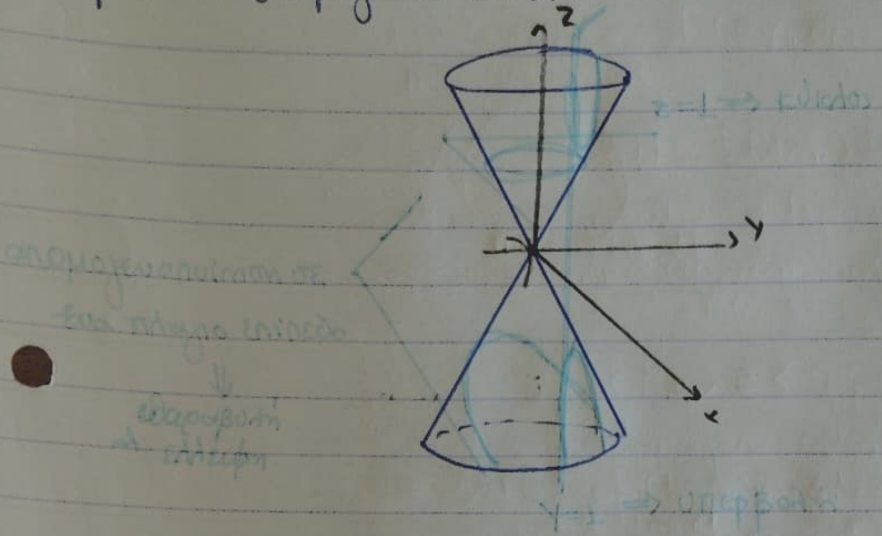
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ

Μπορώ να κάνω και το αντίστροφο, δηλ. απομογενοποίηση

$$f(x,y,z) \longmapsto f(x,y,1)$$

Προφανώς αυτό δεν γίνεται με μοναδικό τρόπο ($x=1$, $y=1$, $z=1$ κ.α.)

(*) Με αυτό τον τρόπο μπορεί κανείς να δει ότι οι κωνικές τομές στην προβολική γεωμετρία είναι οι ίδιες (ένας κώνος που επιδέχεται διαφορετικές απομογενοποιήσεις):



(*) Στον προβολικό χώρο δύο αφινικές ευθείες τέμνονται στο ∞.

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = 3x \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = 3x+2 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow$$

Προφανώς δεν τέμνονται ως αφινικές ευθείες

$z=0$ και $y=3x$ άρα έχω λύση

$[x : 3x : 0] = [1:3:0]$ σημείο στο ∞

ΓΙΑΤΙ ΚΑΝΟΥΜΕ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ?

1. Ενοποιεί διάφορα προβλήματα της αναλυτικής γεωμετρίας

2. Έχω μία καλή θεωρία τομών

Θ. Bezout: Έστω $f(x,y), g(x,y) \in k[x,y]$ με $\deg f = n$, $\deg g = m$, τότε στο $\mathbb{P}^2_k$ οι αντίστοιχες προβολικές πολλαπλότητες $V(\bar{f})$, $V(\bar{g})$ τέμνονται σε ακριβώς $m \cdot n$ σημεία.

↳ μετρώντας την πολλαπλότητα κάθε τομής.

Γενίκευση Θεμ. Θ. Άλγεβρας

→ Όπως στη διαφορική γεωμετρία καλύπταμε το χώρο με χάρτες ($\mathbb{R}^n$) εδώ θα κάνουμε το ίδιο μέσω των $U_i = \{[\alpha_0 : \dots : \alpha_i : \dots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^n_k \mid \alpha_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n_k$

$$[\alpha_0 : \dots : \alpha_i : \dots : \alpha_n] = \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_i} : \dots : 1 : \dots : \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\right]$$

Και γαμώ τις σελίδες!
Πολλά να διαβάσεις!
Ελπίζω να τα κατάλαβες,
αλλά αν όχι,
Μαρία είναι για σένα!
ΠΑΜ!!!

ΜΑΘΗΜΑ 8º 23/10

→ Ευθεία που περνά από τα $(\alpha,\beta), (\alpha',\beta') \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha' & \beta' & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = 0$

Στις 3 διαστάσεις έχουμε αντίστοιχα

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0.$$

Υπενθ: Ένα ιδεώδες είναι ομογενές αν παράγεται από ομογενή πολυώνυμα ή ισοδύναμα $\forall f \in I \Rightarrow f = \sum_{d=0}^{\infty} f_d$, $\underset{\text{ομογενή}}{f_d \in I}$ (πεπερασμένα $\neq 0$)

Έστω $I \trianglelefteq k[x_0,\dots,x_n] \Longrightarrow V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$

αν I ομογενές $\Downarrow$

$V(I) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ⟵ αφινικός κώνος του I

Αγαπάμε Κώστα-Γανυμήδη!

Πρόταση: Αν I ομογενές ιδεώδες, τότε $\sqrt{I}$ ομογενές ιδεώδες.

Απόδειξη:

Έστω $f \in \sqrt{I}$, τότε $\exists m \in \mathbb{N}$ τω $f^m \in I$.

Γράφουμε $f = f_{d_1} + \dots + f_{d_n}$ ως ομογενείς προσθετέους, τότε

$$\underset{I}{\underset{\cap}{f^m}} = (f_{d_1} + \dots + f_{d_n})^m = \sum_{\substack{i_1+\dots+i_n=\delta \\ \delta=0}} \binom{m}{i_1,\dots,i_n} f_{d_1}^{i_1} \cdots f_{d_n}^{i_n}$$

Θεωρούμε ότι ο μεγαλύτερος βαθμός ομογενή παράγοντα είναι d_1, τότε ο μεγαλύτερος βαθμός του f^m είναι του $f_{d_1}^m$.

Άρα, $f_{d_1}^m \in I$, καθώς I ομογενές $\Rightarrow f_{d_1} \in \sqrt{I}$

$\Rightarrow (f - f_{d_1})$ έχει χαμηλότερο βαθμό

Συνεχίζοντας παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Ορ: Έστω $I \trianglelefteq k[x_0,\dots,x_n]$ ομογενές, τότε ορίζουμε

$$V(I) = \{[a_0:\dots:a_n] \in \mathbb{P}_k^n \mid f(a_0,\dots,a_n) = 0 \ \forall f \in I\}$$

(*) Παρατηρούμε ότι κατ'αναλογία με το αφινικό αλγεβρικό σύνολο

$$V(I) = V(\sqrt{I}).$$

Ορσ: Έστω V ένα προβολικό σύνολο, τότε ορίζουμε

$$I(V) = \{f \in k[x_0,\dots,x_r] \mid f(\alpha_0,\dots,\alpha_n)=0 \quad \forall [\alpha_0:\dots:\alpha_n]\in V\}$$

(*) Το $I(V)$ είναι ομογενές ιδεώδες

Πράγματι, V: προβολικό $\Leftrightarrow \forall (a_0,\dots,a_n)\in V \quad \lambda(a_0,\dots,a_n)\in V$.

Συνεπώς, αν $f\in I(V)$, τότε έχουμε

$$f = f_{d_1}+\dots+f_{d_r}$$

ανάλυση σε ομογενείς παράγοντες, τότε αν $P=(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$

$$f(\lambda a_0,\dots,\lambda a_n)=0 \quad \forall \lambda\in k \Rightarrow \lambda^{d_1} f_{d_1}(P)+\dots+\lambda^{d_r} f_{d_r}(P)=0$$

Βλέποντας το παραπάνω ως πολυώνυμο ως προς λ και αφού k άπειρο έχουμε ότι

$$f_{d_1}(P)=\dots=f_{d_r}(P)=0$$

Δηλ. $f_{d_1},\dots,f_{d_r}\in I(V)$. ■

Συνεπώς: Τα αλγεβρικά σύνολα είναι κώνοι (ή κάτι τέτοιο)

Παρατήρηση:

Έχουμε αντιστοιχίσει τα σημεία $P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathbb{A}^n_k$ σε μεγιστικά ιδεώδη

$$m=\langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle.$$

Έστω τώρα $[a_0:\dots:a_n]\in \mathbb{P}^n_k$. Θεωρούμε το ομογενές ιδεώδες

$$\langle \alpha_i x_j - x_i \alpha_j \mid 1\le i<j\le n\rangle$$

$\alpha_0=1$: $\langle x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$

$\alpha_1=1$: $\langle x_0-\alpha_0,\dots,x_n-\alpha_n\rangle$ κ.ο.κ.

$$a_i x_j - \alpha_j x_i \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & \alpha_n \\ x_0 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$ ιδεώδες που παράγεται από τις 2×2 ορίζουσες

determinant varieties

Ομογενές Nullstellensatz: Αν $V(J)\neq\emptyset$, τότε $I(V(J))=\sqrt{J}$

Τοπολογία Zariski: κλειστά $\equiv$ προβολικά αλγεβρικά σύνολα

ΤΟΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΩΝ

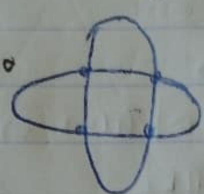
Θεώρημα (Bezout): Έστω F ομογενές πολυώνυμο βαθμού m και G ομογενές πολυώνυμο βαθμού n. Θεωρούμε τις καμπύλες $C_1 = V(F)$ και $C_2 = V(G)$, τότε

$$C_1 C_2 = m\cdot n$$

$$\overset{\|}{\#}(C_1\cap C_2) \text{ προσμετρώντας την πολλαπλότητα της τομής}$$

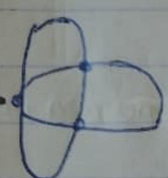
(*) Αν οι C_1, C_2 τέμνονται εγκάρσια, τότε η πολλαπλότητα της τομής είναι 1.

εγκάρσια



2 ελλείψεις είναι τετραγωνικές μορφές (ομογενή βαθμού 2) και άρα έχω $2\cdot 2=4$ σημεία τομής

πολλαπλότητα 2



Παρατήρηση:

Το ιδεώδες $I=\langle x_0,x_1,\dots,x_n\rangle \to V(I)=(0,0,\dots,0)\in \mathbb{A}_k^{n+1}$!

Όμως $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{A}_k^{n+1}\setminus\{0,\dots,0\}/\sim$, δηλ το I είναι irrelevant ιδεώδες και δεν αντιστοιχεί σε σημείο. Μάλιστα, ως προβολικό αλγεβρικό σύνολο

$$V(I)=\emptyset$$

Όταν λογαριάζω το $V(I)$ δεν υπολογίζω το $(0,\dots,0)$

Έστω $k, \bar{k}$ και $a=a_0\neq 0$, $f(x)=a_0\cdot\prod_{j=1}^{s}(x-\alpha_j)^{n_j}$.

Για να υπολογίσω την πολλαπλότητα τομής, θα κοιτάξω το localization.

Θεωρούμε $S=k[x]\setminus \underbrace{(x-\alpha)k[x]}_{\text{πρώτο}}$ και $R_\alpha = S^{-1}k[x]$

Στην τοπικοποίηση αφαιρώ πρώτα ιδεώδη, έτσι αντιστρέφοντας τα στοιχεία του S έχω ότι τα ιδεώδη του R_α παράγονται από δυνάμεις του $x-\alpha$.

Μπορούμε να δούμε το R_α ως

$$R_\alpha = \left\{\frac{f(x)}{g(x)} \;\middle|\; f(x),g(x)\in k[x],\ g(\alpha)\neq 0\right\} \subseteq \underbrace{Quot(k[x])}_{= k(x)}$$

↓

ως τοπικός δακτύλιος έχει μοναδικό μεγιστικό ιδεώδες

Υπεν: Έχουμε τις εξής αντιστοιχίες ιδεωδών

$$\{\text{Ιδεώδη του } R/I\} \xleftrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{\text{Ιδεώδη του } R \text{ που περ. το } I\}$$

και

$$\{\text{Ιδεώδη του } S^{-1}R\} \xleftrightarrow[\text{επί}]{1-1} \{J \trianglelefteq R \text{ τω } J\cap S=\emptyset\}$$

Στην τοπικοποίηση σε πρώτο ιδεώδες P ($S = R \setminus P$) έχουμε ότι

$$J\cap S=\emptyset \iff J\subseteq P$$

Παρατηρήσεις: 1. $\langle (x-\alpha)^k\rangle \subseteq \langle x-\alpha\rangle$

2. $J \subseteq \langle x-\alpha\rangle \iff x-\alpha \mid h(x) \Rightarrow h(x) = (x-\alpha)^k u(x)$

$\overset{\|}{\langle h(x)\rangle}$ καθώς $k[x]$ ΠΚΙ

$u(\alpha)\neq 0 \Rightarrow$ αντιστρ. στο $S^{-1}R$.

↦ με σέξυ τρόπο

Ορσ: Έστω $f(x) = a_0 \prod_{j=1}^{s} (x-\alpha_j)^{n_j}$ και R_{α_j} η τοπικοποίηση στο α_j, τότε

$$f(x) R_{\alpha_j} = (x-\alpha_j)^{n_j} R_{\alpha_j}$$

και μπορούμε να ορίσουμε $n_j = \dim_k \underbrace{R_{\alpha_j}/(f R_{\alpha_j})}_{\text{δx παράγεται από τα } 1,\, x-\alpha_j,\, \dots,\, (x-\alpha_j)^{n_j-1}}$ → πρώτο

(*) Δηλ. χρησιμοποιώντας την πολλαπλότητα τομής, και η πολλαπλότητα μιας ρίζας μπορεί να οριστεί με όρους τοπικών δακτυλίων

ΠΛΗΡΩΣΗ

Πέρα από το localization υπάρχει και το completion, δηλ. η πλήρωση

$$k[x-\alpha_j] \longrightarrow k[[x-\alpha_j]]$$

πολυωνυμικός δακτύλιος — τυπικές δυναμοσειρές του k με κέντρο το α_j

ΙΔΕΑ ΠΛΗΡΩΣΗΣ:

$R = k[x-\alpha_j]$ και $f\in R$, τότε $f(x) = (x-\alpha_j)^{\nu} u(x)$ με $u(\alpha_j)\neq 0$, τότε θεωρούμε $\vartheta(f(x)) = \nu$ και σταθεροποιώντας μία σταθερά $0<c<1$ κατασκευάζουμε μια νόρμα

$$\|f\| = c^{\nu}$$

Και τότε $\mathrm{Quot}(R) \xrightarrow{\text{πλήρωση}}$ Cauchy (mod μηδενικές ακολουθίες).

38 ← έχω φάει μπούλινγκ κ' σφαλιάρα από τη γιαγιά μου για να μάθω να κάνω το 8 έτσι κ' όχι 8. ΘΑ ΣΕΒΕΣΑΙ! ΝΑ ΤΟ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ!!

(*) Όπως στον εντοπισμό, η πλήρωση καταργεί ιδεώδη, καθώς αντιστρέφει στοιχεία.

πχ) $\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu\geq 0} x^\nu \Rightarrow (1-x)\cdot\left(\sum_{\nu\geq 0} x^\nu\right) = 1$

↳ αντιστρέψιμο

(*) Κάποιοι ορίζουν την πολλαπλότητα τομής στο complete ring. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$k[x]_P/\langle x^\nu\rangle \cong k[x]/\langle x^\nu\rangle \cong k[[x]]/\langle x^\nu\rangle$$

(*) Έστω $P=(\alpha,\beta)$ σημείο και $R=\bar{k}[x,y]$, τότε ορίζουμε τον εντοπισμό

$$R_P = \left\{ \frac{G(x,y)}{F(x,y)} \;\middle|\; F(\alpha,\beta)\neq 0 \right\} = (R\setminus m_P)^{-1} R$$

Μέσα σε αυτούς τους δακτυλίους "ζουν" τα αναπτύγματα Taylor. (δακτύλιοι ρίψεων)

Ορσ: Έστω $\underset{}{\overset{\bar{k}[x,y]}{f,g}}$ καμπύλες με $\overset{\text{ΜΚΔ}}{(f,g)}=1$. Ορίζουμε στο $P=(a,b)$ την πολλαπλότητα τομής των $V(f),V(g)$ ως

$$I_P(V(f),V(g)) = \dim_k R_P/\langle f,g\rangle.$$

(*) Αν οι καμπύλες δεν τέμνονται στο P, η πολλαπλότητα κάνει 0 και άρα είναι καλά ορσ σε κάθε περίπτωση.

πχ (1) Έστω $f(x,y)=ax+by$ και $g(x,y)=cx+dy$. Γνωρίζουμε ότι πρόκειται για 2 ευθείες με μοναδικό σημείο τομής το 0 αν

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

και τότε $\langle f,g\rangle = \langle x,y\rangle$.

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x,y \in \langle f,g\rangle$$

Σε αυτή την περίπτωση $\dim_{\bar{k}} R_{(0,0)}/\langle x,y\rangle = \dim_{\bar{k}} \bar{k} = 1$, δηλ τέμνονται εγκάρσια

Συμφωνεί με το Bezout $(mn = 1\cdot 1 = 1)$

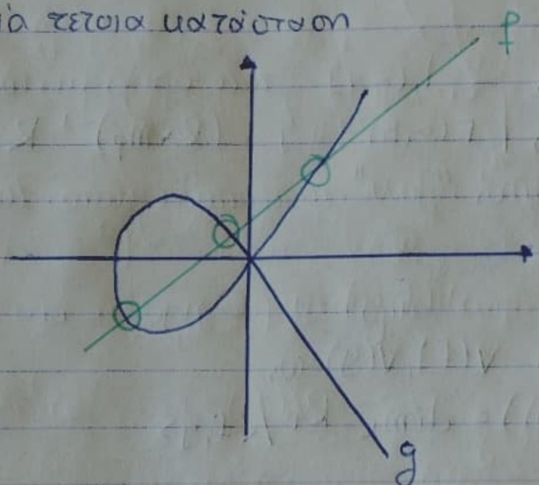
② Έστω $f = y$ και $g = y - x^n$, για να υπολογίσω την πολλαπλότητα τομής στο $(0,0)$ έχω

$$R_p/\langle y, y-x^n\rangle = \langle 1, x, \dots, x^{n-1}\rangle = k[x]_{(0,0)}/\langle x^n\rangle$$

εξαφανίζω το y $\qquad$ $y = x^n \Rightarrow$ εξαφανίζω x^k για $k \geq n$ $\quad (\langle y, y-x^n\rangle = \langle x^n, y\rangle)$

$$\Rightarrow \dim_{\bar{k}} R_p/\langle y, y-x^n\rangle = n.$$

③ Έστω $f_\varepsilon(x,y) = y - x + \varepsilon$ και $g(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$ με $\varepsilon \in \bar{k}$.
Τότε έχω μία τέτοια κατάσταση



τέμνονται σε 3 σημεία

Όσο το ε πλησιάζει το 0, τα τρία σημεία πλησιάζουν στο $(0,0)$.
Στην οριακή κατάσταση $\varepsilon = 0$ τα 3 σημεία ταυτίζονται και έχουμε

$$\langle y-x, y^2-x^2(x+1)\rangle = \langle y-x, x^3\rangle$$

και άρα $R_{(0,0)}/\langle y-x, x^3\rangle = \langle 1, x, x^2\rangle = k[x]_0/\langle x^3\rangle$

$$\Rightarrow \dim_k k[x]_0/\langle x^3\rangle = 3$$

ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΕΣ

Ορ: Έστω $Y \subseteq \mathbb{A}^n_k$ με $Y = V(I)$, $I = \langle f_1, \dots, f_r\rangle$, τότε το Y θα λέγεται μη ιδιόμορφο αν η τάξη του Ιακωβιανού πίνακα $(\partial f_i/\partial x_j)_{ij}$ είναι $n-r$, όπου $\dim_k Y = r$.

Στόχος: να έχουμε ένα γενικό variety που καλύπτεται από αφινικούς χώρους

Παρατήρηση:

1. Τα f_i είναι πολυώνυμα, άρα η παράγωγος ορίζεται και τυπικά (χωρίς calculus) μέσω των σχέσεων

α) $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$

β) $\frac{\partial (f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$

γ) $\frac{\partial c}{\partial x_i} = 0 \quad \forall c$ σταθερό

δ) $\frac{\partial fg}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$

Μπορεί κανείς να το δει από τον τύπο του Taylor ως μία διαδικασία διαιρέσεων με πηλίκο και υπόλοιπο

$f(x) \in k[x]$ και ... $a \in k$

$f(x) = (x-a)\pi_1(x) + f(a) \Rightarrow f(a) = f \bmod (x-a)$

$\pi_1(x) = (x-a)\pi_2(x) + f'(a)$

$\hookrightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \pi_2(x)(x-a)$ κ.ο.κ.

$\downarrow$

Την παράγωγο με αυτόν τον τρόπο την όρισε ο Caratheodorie

2. Αν κανείς κάνει την παραπάνω διαδικασία στο $\mathbb{Q}$, τότε παίρνει το completion του $\mathbb{Z}$ ως προς p, δηλ. το $\mathbb{Z}_p$ (ακέραιοι p-αδικοί) $\subseteq \mathbb{Q}_p$

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ:

- Ο Hensel όρισε τους p-αδικούς και πήγε να κάνει ανάλυση ~ 1897
- Η μαθηματική κοινότητα εναντιώνεται (ο Hilbert τα λέει μπούρδες)
- Ο Hasse παρατάει το διδακτορικό του στο Göttingen για να δουλέψει με τον Hensel αποδεικνύοντας το

Hasse's Local Global Principle:

μια εξίσωση έχει ρίζα στο $\mathbb{Q}$ $\Longleftrightarrow$ έχει ρίζες στα $\mathbb{Q}_p$ και στο $\mathbb{R}$

Επαναληπτικές Μέθοδοι - Αριθμητική Ανάλυση (λ) Είναι πολύ χρήσιμο να σκεφτεί κανείς να "περάσει" κατασκευές, όπως ο τύπος του Taylor, σε πιο γενικούς δακτυλίους

Too much informations here!